Сходимость конечномерных распределений числа пустых ящиков решета Бернулли

В. А. Ватутин*, А. М. Иксанов†, А. В. Маринич‡

12 марта 2013 г.

Аннотация

Решето Бернулли – это случайная схема размещения, получаемая путем размещения независимых точек, равномерно распределенных на сегменте $[0,1]$, по интервалам, образованным последовательными состояниями мультипликативного случайного блуждания с множителями, лежащими в интервале $(0,1)$. Предполагая, что число размещаемых точек равно n, мы исследуем сходимость при $n \to \infty$ конечномерных распределений числа пустых интервалов с номерами, не превосходящими номер последнего занятого интервала. Для доказательств применяется новый подход, позволивший отказаться от ограничений, накладывавшихся в предшествующих работах на носитель распределения множителей мультипликативного случайного блуждания.

Ключевые слова: решето Бернулли, схема занятости Карлина в случайной среде, сходимость конечномерных распределений, пуассонизация

1 Введение и основные результаты

Обозначим через $T := \left(T_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, мультипликативное случайное блуждание, задаваемое соотношениями

$$T_0 := 1, \quad T_k := \prod_{i=1}^{k} W_i, \quad k \in \mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \backslash \{0\},$$

где $\left(W_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ – независимые копии случайной величины W, принимающей значения в интервале $(0,1)$. Пусть, далее, $\left(U_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ – независимые случайные величины, не зависящие от T и имеющие равномерное распределение на $[0,1]$. Случайная схема

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, Москва, 119991, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

†Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64/13, Киев, 01601, Украина; e-mail: iksan@univ.kiev.ua

‡Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64/13, Киев, 01601, Украина; e-mail: marynych@unicyb.kiev.ua

размещения, определяемая распределением "шаров" U_1, U_2 и т.д. по бесконечному набору "ящиков" $(T_k, T_{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$, называется *решетом Бернулли.* Исследование этой схемы размещения было начато в статье [10]. С тех пор появилось несколько работ [12, 13, 14, 15, 16, 19, 20], в которых анализировались различные асимптотические свойства решета Бернулли.

Поскольку размещаемый шар попадает в ящик $(T_k, T_{k-1}]$ со случайной вероятностью

$$P_k := T_{k-1} - T_k = W_1 W_2 \cdots W_{k-1}(1 - W_k),$$

решето Бернулли является классической схемой размещения Карлина [11, 22] со *случайными частотами* $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (или, если угодно, в случайной среде $\big(P_k\big)$ или $\big(W_k\big)$). При этом предполагается, что если случайная среда $\big(P_k\big)$ фиксирована, то *абстрактные* шары распределяются по бесконечному набору *абстрактных* ящиков $1, 2, \ldots$ независимо, а вероятность попадания шара в ящик j равна P_j. В дальнейшем, допуская некоторую вольность изложения, мы будем говорить, что ящик $(T_k, T_{k-1}]$ имеет номер k.

Напомним, что некоторые схемы размещения шаров по счетному числу ящиков в *неслучайной среде* рассматривались также в работах [2, 3, 4], и отметим, что схема размещения по счетному числу ящиков существенно отличается от классической схемы размещения шаров по ящикам, описанной, например, в монографии [1].

Предполагая, что число размещаемых шаров равно n (иными словами, используя выборку объема n из равномерного распределения), обозначим через K_n число занятых ящиков, а через M_n максимальный номер, среди занятых ящиков. Положим также $L_n := M_n - K_n$ и заметим, что случайная величина L_n равна числу пустых ящиков с номерами, не превосходящими M_n. В упомянутых выше статьях достаточно полно была изучена сходимость *одномерных* распределений последовательностей случайных величин K_n, M_n и L_n. Данная работа содержит первые результаты о сходимости *конечномерных* распределений элементов набора $\big(L_n\big)$.

Прежде чем формулировать основные результаты статьи, напомним одно из утверждений, содержащихся в теореме 1.1 работы [20].

Утверждение 1.1. *Предположим, что* $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(1-W)^n}{\mathbb{E}W^n} = c \in (0, \infty).$$

Тогда

$$L_n \ \xrightarrow{d}\ L, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

где L *– случайная величина с геометрическим распределением*

$$\mathbb{P}\{L = k\} = \frac{c}{c+1}\left(\frac{1}{c+1}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

В частности, соотношение (1) *выполнено, если*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = c. \tag{2}$$

Нет оснований полагать, что лишь при условиях $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$ и (2) будет иметь место сходимость каких либо конечномерных распределений, связанных с последовательностью $\big(L_n\big)$. Однако при дополнительном предположении о *скорости убывания* к нулю числителя в (2) результат такого рода доказан в приводимой ниже теореме 1.2.

Пусть $N_\infty^{(\alpha,\, c)} := \sum_k \varepsilon_{(t_k,\, j_k)}$ – пуассоновская считающая случайная мера на $[0,\infty)\times(0,\infty]$ с мерой интенсивности $\mathbb{LEB}\times\nu_{\alpha,\, c}$, где $\mathbb{LEB}$ – мера Лебега на $[0,\infty)$, а $\nu_{\alpha,\, c}$ – мера на $(0,\infty]$, задаваемая равенством

$$\nu_{\alpha,\, c}\big((x,\infty]\big) = c^{-1}x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Пусть, далее, $\big(X_\alpha(t)\big)_{t\geq 0}$ – устойчивый субординатор порядка α, не зависящий от $N_\infty^{(\alpha,\, c)}$ и имеющий преобразование Лапласа

$$\mathbb{E}\exp(-zX_\alpha(t)) = \exp(-\Gamma(1-\alpha)tz^\alpha), \quad z \geq 0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция, а $\big(X_\alpha^{\leftarrow}(s)\big)_{s\geq 0}$ – обратный устойчивый субординатор порядка α, задаваемый равенством

$$X_\alpha^{\leftarrow}(s) := \inf\{t \geq 0 : X_\alpha(t) > s\}, \quad s \geq 0.$$

Условимся в дальнейшем обозначать символами ℓ, $\widehat{\ell}$ и ℓ^* функции, медленно меняющиеся на бесконечности. Кроме того запись $Z_t(u) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} Z(u)$, $t \to \infty$ будет обозначать сходимость конечномерных распределений, а именно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < \infty$

$$\big(Z_t(u_1), \ldots, Z_t(u_n)\big) \ \overset{d}{\to} \ \big(Z(u_1), \ldots, Z(u_n)\big), \quad t \to \infty.$$

Теорема 1.2. *Предположим, что существуют $\alpha \in (0,1)$, функция ℓ и константа $c \in (0,\infty)$ такие, что*

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \quad \sim \quad c\,\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\} \ \sim \ x^{-\alpha}\ell(x), \quad x \to \infty. \tag{3}$$

Тогда

$$L_{[e^{ut}]} \ \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \ \sum_k 1_{\{X_\alpha(t_k)\leq u < X_\alpha(t_k)+j_k\}} =: R_{\alpha,\, c}(u), \quad t \to \infty.$$

При этом при фиксированном $u > 0$ распределение $R_{\alpha,\, c}(u)$ является геометрическим с вероятностью успеха $c(c+1)^{-1}$.

Замечание 1.3. Из сходимости конечномерных распределений в теореме 1.2 немедленно следует стационарность в узком смысле процесса $\big(R_{\alpha,\, c}(e^t)\big)_{t\in\mathbb{R}}$.

Теоремы 1.4 и 1.5, приводимые ниже, усиливают теоремы 1.1 [19] и теоремы 1.2 [20] соответственно, в которых была установлена сходимость одномерных распределений.

Теорема 1.4. *Пусть существуют числа $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$ ($\alpha + \beta > 0$) и функции ℓ и $\widehat{\ell}$ такие, что*

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \ \sim \ x^{-\alpha}\ell(x) \ \ \text{и} \ \ \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\} \ \sim \ x^{-\beta}\widehat{\ell}(x), \quad x \to \infty. \tag{4}$$

В случае $\alpha = \beta$ предположим дополнительно, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = 0$$

и что найдется неубывающая функция $u(x)$ такая, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}u(x)}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = 1.$$

Тогда

$$\frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > t\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\}} L_{[e^{ut}]} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \int_{[0,\,u]} (u-s)^{-\beta} \mathrm{d}X_\alpha^{\leftarrow}(s) =: W_{\alpha,\,\beta}(u), \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Теорема 1.5. *Предположим, что найдутся число $\beta \in [0,1)$ и функция $\widehat{\ell}$ такие, что*

$$\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\} \ \sim\ x^{-\beta}\widehat{\ell}(x), \quad x \to \infty. \tag{6}$$

(а) *Если $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(\ln W) < \infty$, то*

$$\frac{L_{[e^{ut}]} - \mu^{-1}\int_0^{ut} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > y\}\mathrm{d}y}{\sqrt{\mu^{-1}\int_0^t \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > y\}\mathrm{d}y}} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} V(u), \quad t \to \infty, \tag{7}$$

где $\mu := \mathbb{E}|\ln W| < \infty$, а $\big(V(s)\big)_{s\ge 0}$ – центрированный гауссовский процесс с

$$\mathbb{E}V(t)V(s) = t^{1-\beta} - (t-s)^{1-\beta}, \quad 0 \le s \le t.$$

(б) *Предположим, что $\sigma^2 = \infty$ и*

$$\int_{[0,\,x]} y^2 \mathbb{P}\{|\ln W| \in \mathrm{d}y\} \ \sim\ \ell(x), \quad x \to \infty. \tag{8}$$

Пусть $c(x) = x^{1/2}\ell^*(x)$ – положительная функция такая, что $\lim_{x\to\infty} x\ell(c(x))/c^2(x) = 1$.
(б1) *Если*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}\big(\ell^*(x)\big)^2 = 0, \tag{9}$$

то выполняется соотношение (7).
(б2) *Если $\beta = 0$ и, кроме того,*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}\big(\ell^*(x)\big)^2 = \infty,$$

то

$$\frac{L_{[e^{ut}]} - \mu^{-1}\int_0^{ut} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > y\}\mathrm{d}y}{\mu^{-3/2}c(t)\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\}} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \int_{[0,\,u]} (u-s)^{-\beta}\mathrm{d}Z_2(s) =: W_{2,\,\beta}(u), \quad t \to \infty,$$

где $\big(Z_2(s)\big)_{s\geq 0}$ *– броуновское движение.*
(в) *Предположим, что для* $\alpha \in (1,2)$

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \;\sim\; x^{-\alpha}\ell(x), \quad x \to \infty, \tag{10}$$

где $c(x) = x^{1/\alpha}\ell^*(x)$ *– положительная функция такая, что* $\lim_{x\to\infty} x\ell(c(x))/c^{\alpha}(x) \;=\; 1.$
(в1) *Если*

$$\lim_{x\to\infty}\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}x^{2/\alpha-1}\big(\ell^*(x)\big)^2 = 0, \tag{11}$$

то выполняется соотношение (7).
(в2) *Если* $\beta \in [0, 2/\alpha - 1]$, *причем в случае* $\beta = 2/\alpha - 1$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{x\to\infty}\mathbb{P}\{|\ln(1-W) > x|\}x^{2/\alpha-1}\big(\ell^*(x)\big)^2 = \infty, \tag{12}$$

то

$$\frac{L_{[e^{ut}]} - \mu^{-1}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > y\}\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\}} \;\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\; \int_{[0,\,u]}(u-s)^{-\beta}\mathrm{d}Z_\alpha(s) =: W_{\alpha,\beta}(u), \quad t\to\infty,$$

где $\big(Z_\alpha(s)\big)_{s\geq 0}$ *– устойчивый процесс Леви порядка* α *такой, что*

$$\mathbb{E}\exp\{izZ_\alpha(1)\} = \exp\{-|z|^\alpha\Gamma(1-\alpha)(\cos(\pi\alpha/2) + \mathrm{i}\sin(\pi\alpha/2)\,\mathrm{sign}(z))\},\; z\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Замечание 1.6. (I) Существование и свойства функций $c(t)$, появляющихся в пунктах (б) и (в) теоремы 1.5, хорошо известны. Например, в пункте (б) функция $c(t)$ является при $t\to\infty$ асимптотически обратной к $t^2/\int_{[0,\,t]}y^2\mathrm{d}\mathbb{P}\{|\ln W| \in \mathrm{d}y\} \sim t^2/\ell(t)$. Поэтому согласно утверждению 1.5.15 [7] $c(t) \sim t^{1/2}(L^{\#}(t))^{1/2}$, где $L^{\#}(t)$ есть функция, сопряженная по де Брёйну к функции $1/\ell(t^{1/2})$.
(II) Если распределение случайной величины $|\ln W|$ нерешетчато, то, как доказано в теореме 1.2 [20], сходимость одномерных распределений в пунктах (а), (б1) и (в1) теоремы 1.5 имеет место и без предположения о правильном изменении функции $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}$. Достаточно, наряду с выполнением остальных условий теоремы, потребовать справедливость соотношения $\mathbb{E}|\ln(1-W)| = \infty$.
(III) Пусть $\big(Z_2(s)\big)_{s\geq 0}$ – процесс броуновского движения, не зависящий от $\big(V(s)\big)$. Как заметил А.Ю. Пилипенко, конечномерные распределения процесса $\big(V(s) + Z_2(s^{1-\beta})\big)$ (напомним, что $\beta\in[0,1)$) совпадают с конечномерными распределениями шкалированного *дробного броуновского движения*. Ясно, что в случае $\beta = 0$ конечномерные распределения $\big(V(s)\big)$ совпадают с конечномерными распределениями броуновского движения.

Отметим две заслуживающие внимания ситуации, не рассмотренные (по разным причинам) в данной работе.
(I) Предположим, что выполнены условия пунктов (б) или (в) теоремы 1.5, а пределы в (9) или (11), соответственно, конечны и отличны от нуля. Авторам неизвестно, имеет ли место в этих случаях сходимость хотя бы одномерных распределений.
(II) Приведенные выше теоремы собраны воедино, поскольку их доказательства проходят в рамках *единого* подхода. К сожалению, этот подход не применим к мультипликативным случайным блужданиям, для которых $\mathbb{E}(|\ln W| + |\ln(1-W)|) < \infty$,

что объясняет отсутствие соответствующих результатов в данной статье. Два разных доказательства сходимости одномерных распределений числа пустых ящиков в упомянутом случае можно найти в [15, 16].

Структура работы такова. В контексте задач, связанных со случайными размещениями, весьма плодотворной идеей является пуассонизация, то есть переход от схемы с детерминированным числом шаров к схеме со случайным числом шаров, имеющим распределение Пуассона. В разделе 2 сформулированы три леммы, доказательства которых приведены в разделах 3 и 4 соответственно. Две из них обосновывают целесообразность пуассонизации решета Бернулли, а третья обеспечивает депуассонизацию, то есть обратный переход. Доказательства теорем 1.2, 1.4 и 1.5 приведены в разделах 5, 6 и 7 соответственно. Наконец, вспомогательные результаты собраны в Приложении.

2 Пуассонизация и депуассонизация

Пусть $\big(\tau_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ – пуассоновский поток единичной интенсивности, не зависящий ни от набора случайных величин $\big(U_j\big)$, ни от мультипликативного случайного блуждания T. Обозначим через $\big(\pi(t)\big)_{t\geq 0}$ соответствующий процесс Пуассона, определяемый равенством

$$\pi(t) := \#\{k \in \mathbb{N} : \tau_k \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Вместо схемы размещения n шаров мы будем использовать *пуассонизированную* версию решета Бернулли, в которой моменты распределения шаров (точек U_k) по ящикам (интервалам $(T_{j-1}, T_j]$) задаются последовательностью $\big(\tau_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$. А именно, точка U_k размещается в соответствующий ей ящик из сегмента $[0, 1]$ в момент времени τ_k. Таким образом, за промежуток времени $[0, t]$ по ящикам будет размещено случайное число $\pi(t)$ шаров. Обозначим через $\pi_k(t)$ число шаров, попавших в k-тый ящик за промежуток времени $[0, t]$. Ясно, что если набор (среда) $\big(T_j\big)$ фиксирован, то, во-первых, при каждом k процесс $\big(\pi_k(t)\big)_{t\geq 0}$ является процессом Пуассона с интенсивностью $P_k = T_{k-1} - T_k$, а во-вторых, для разных k эти процессы *независимы.* Последнее свойство и определяет преимущество пуассонизированной схемы перед исходной.

Введем обозначения $M(t) := M_{\pi(t)}$, $K(t) := K_{\pi(t)}$ и $L(t) := L_{\pi(t)}$. Тогда, например, $L(t)$ есть число пустых ящиков, принадлежащих промежутку занятости, при бросании $\pi(t)$ шаров. Напомним, что решето Бернулли можно интерпретировать как схему Карлина в случайной среде $\big(W_k\big)$, задаваемой независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Два первых вспомогательных результата данной работы показывают, что изучение асимптотики $L(t)$ можно заменить анализом асимптотического поведения довольно простого функционала, определяемого лишь средой.

Введем стартующее из нуля случайное блуждание $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ равенствами

$$S_0 := 0, \quad S_n := |\log W_1| + \ldots + |\log W_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

и положим $\eta_n := |\log(1 - W_n)|$.

Лемма 2.1. *Если* $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$, *то*

$$L(e^{ut}) - \sum_{k\ge 0} 1_{\{S_k \le ut < S_k + \eta_{k+1}\}} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty. \tag{14}$$

Лемма 2.2. *Если* $\mathbb{E}|\ln W| < \infty$, *то*

$$\frac{L(e^{ut}) - \sum_{k\ge 0} 1_{\{S_k \le ut < S_k + \eta_{k+1}\}}}{a(t)} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty \tag{15}$$

для любой функции $a(t)$ *такой, что* $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$. *Иными словами, конечномерные распределения процесса* $\big(L(e^{ut}) - \sum_{k\ge 0} 1_{\{S_k \le ut < S_k + \eta_{k+1}\}},\ t \ge 0\big)$ *плотны.*

Лемма 2.3, приведенная ниже, позволяет осуществить *депуассонизацию*, то есть переход от схемы с пуассоновским числом шаров к исходной схеме с детерминированным числом шаров. Отметим, что в работах [15, 19, 20] было использовано несколько подходов к депуассонизации числа пустых ящиков. Однако утверждение леммы 2.3 является наиболее сильным из всех известных ранее, даже если речь идет только об одномерных распределениях.

Лемма 2.3. *Вне зависимости от того является ли среднее случайной величины* $|\ln W|$ *конечным или бесконечным*

$$L(e^{ut}) - L_{[e^{ut}]} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty.$$

3 Доказательство лемм 2.1 и 2.2

Положим

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}, \quad t \ge 0,$$

и введем функцию восстановления

$$U(t) := \mathbb{E}\nu(t) = \sum_{k\ge 0} \mathbb{P}\{S_k \le t\}, \quad t \ge 0.$$

В дальнейшем мы несколько раз будем использовать теорему Блєккуєла и ключевую теорему восстановления. В силу предположения $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$ отдельный анализ ситуации, когда распределение случайной величины $|\ln W|$ является решетчатым, не требуется. Действительно, согласно теореме Блэкуэлла и соображениям монотонности в решетчатом случае, равно как и в случае, когда распределение $|\ln W|$ нерешетчато,

$$\lim_{t\to\infty} \big(U(t+h) - U(t)\big) = 0 \tag{16}$$

для любого $h > 0$. Поэтому дословное повторение доказательства ключевой теоремы восстановления, приведенной на с. 241 [25], позволяет утверждать, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\,t]} g(t-x)\mathrm{d}U(x) = 0,$$

если функция g непосредственно интегрируема по Риману на $[0,\infty)$, и

$$\lim_{t\to\infty}\int_{[t,\,\infty)} g(t-x)\mathrm{d}U(x)=0,$$

если g непосредственно интегрируема по Риману на $(-\infty,0]$.

Доказательство леммы 2.1. Для доказательства леммы 2.1 достаточно установить сходимость по вероятности к нулю левой части соотношения (14) при $u=1$ и воспользоваться приемом Крамера-Уолда. Для удобства понимания мы разобьем доказательство леммы на несколько шагов.
Шаг 1. Покажем, что максимальный номер ящика, среди заполненных за промежуток времени $[0,e^t]$, удовлетворяет соотношению

$$M(e^t)-\nu(t)\ \overset{P}{\to}\ 0,\quad t\to\infty.$$

С этой целью положим $E(n):=-\ln\min(U_1,\dots,U_n)$ и заметим, что $M(e^t)=\nu(E(\pi(e^t)))$. Разность $E(n)-\ln n$ сходится по распределению при $n\to\infty$ к случайной величине E^*, имеющей распределение Гумбеля. Так как последовательность $\big(E(n)\big)$ не зависит от процесса $\big(\pi(t)\big)$, то разность $E(\pi(e^t))-\ln\pi(e^t)$ также сходится к E^* по распределению при $t\to\infty$. В силу слабого закона больших чисел для процесса Пуассона $\ln\pi(e^t)-t\ \overset{P}{\to}\ 0$ при $t\to\infty$. Значит

$$\lim_{t\to\infty}\big(E(\pi(e^t))-t\big)=E^*\ \text{ по распределению.}\tag{17}$$

Для простоты записи положим $R(t):=E(\pi(e^t))$. Используя неравенство Маркова и тот факт, что функция восстановления $U(t)$ не убывает, для произвольных $\gamma>0$ и $\varepsilon>0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big\{\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{0<R(t)-t\le\gamma\big\}}>\varepsilon\Big|R(t)\Big\} &\le \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\Big(\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{0<R(t)-t\le\gamma\big\}}\Big|R(t)\Big)\\ &= \varepsilon^{-1}\big(U\big(t+R(t)-t\big)-U(t)\big)1_{\{0<R(t)-t\le\gamma\}}\\ &\le \varepsilon^{-1}\big(U(t+\gamma)-U(t)\big).\end{aligned}$$

Отсюда и из (16) вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{0<R(t)-t\le\gamma\big\}}>\varepsilon\Big|R(t)\Big\}=0\ \text{ почти наверное.}$$

Следовательно

$$\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{0<R(t)-t\le\gamma\big\}}\ \overset{P}{\to}\ 0,\quad t\to\infty$$

по теореме Лебега об ограниченной сходимости.

Очевидно, что для любых $\gamma>0$ и $\varepsilon>0$

$$\mathbb{P}\big\{\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{R(t)-t>\gamma\big\}}>\varepsilon\big\}\le\mathbb{P}\{R(t)-t>\gamma\}.$$

Отталкиваясь от этого неравенства, вспоминая соотношение (17) и используя абсолютную непрерывность распределения случайной величины E^*, заключаем, что

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\big\{\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{R(t)-t>\gamma\big\}}>\varepsilon\big\}\le \mathbb{P}\{E^*>\gamma\}.$$

Наконец,

$$\lim_{\gamma\to\infty}\varlimsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\big\{\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{R(t)-t>\gamma\big\}}>\varepsilon\big\}=0.$$

Следствием полученных оценок является важное соотношение

$$\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{R(t)-t>0\big\}}\ \overset{P}{\to}\ 0,\quad t\to\infty.$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)1_{\big\{R(t)-t\le 0\big\}}\ \overset{P}{\to}\ 0,\quad t\to\infty.$$

Этим и завершается первый этап доказательства леммы 2.1.

Шаг 2. Цель этого шага – нахождение удобной аппроксимации случайной величины $K(e^t)$ - количества ящиков, в каждый из которых за промежуток времени $[0,e^t]$ попал хотя бы один шар. А именно, мы покажем, что

$$K(e^t)-\sum_{k\ge 0}\Bigg(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Bigg)\ \overset{P}{\to}\ 0,\quad t\to\infty.$$

Имеет место представление

$$K(e^t)=\sum_{k\ge 1}1_{\{\pi_k(e^t)\ge 1\}},\tag{18}$$

где $\pi_k(e^t)$ – число шаров (пуассонизированной схемы), попавших в k-й ящик во временном промежутке $[0,\, e^t]$. В силу равенства

$$\mathbb{E}\big(K(e^t)|(P_j)\big)=\sum_{k\ge 0}\Bigg(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Bigg)\tag{19}$$

для доказательства желаемой аппроксимации достаточно показать, что

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\,\mathrm{Var}\big(K(e^t)|(P_j)\big)=0.\tag{20}$$

Поскольку при фиксированных $\big(P_j\big)$ индикаторы в (18) независимы, то

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\mathrm{Var}\big(K(e^t)|(P_j)\big) &= \mathbb{E}\sum_{k\ge 0}\Bigg(\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)-\exp\big(-2e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Bigg)\\ &= \int_{[0,\,\infty)}\Bigg(\varphi(e^{t-y})-\varphi(2e^{t-y})\Bigg)\mathrm{d}U(y),\end{aligned}$$

где $\varphi(y) := \mathbb{E}e^{-y(1-W)}$. По лемме 8.1 (см. Приложение) функция $g_0(y) := \varphi(e^y) - \varphi(2e^y)$ непосредственно интегрируема по Риману на $\mathbb{R}$, что позволяет использовать ключевую теорему восстановления, оправдывающую соотношение (20).
Шаг 3. Убедимся в справедливости соотношения

$$Z(t) := \sum_{k\geq 0}\Big(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Big)1_{\{S_k>t\}} \ \overset{P}{\to}\ 0, \quad t\to\infty.$$

По лемме 8.1 функция $g_1(y) := \mathbb{E}\big(1-\exp\big(-e^y(1-W)\big)\big)$ непосредственно интегрируема по Риману на $(-\infty, 0]$. Отсюда и из ключевой теоремы восстановления вытекает, что

$$\mathbb{E}Z(t) = \int_{[t,\,\infty)} g_1(t-y)\mathrm{d}U(y) \ \to\ 0, \quad t\to\infty.$$

Шаг 4. Проверим выполнение соотношения

$$Y(t) := \sum_{k\geq 0}\Big(\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big) - 1_{\{S_k+\eta_{k+1}>t\}}\Big)1_{\{S_k\leq t\}} \ \overset{P}{\to}\ 0, \quad t\to\infty.$$

Для этого запишем $Y(t)$ в виде разности двух неотрицательных случайных функций

$$\begin{aligned} Y(t) \ &= \ \sum_{k\geq 0}\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)1_{\{S_k+\eta_{k+1}\leq t\}} \\ &- \ \sum_{k\geq 0}\Big(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Big)1_{\{S_k\leq t<S_k+\eta_{k+1}\}} =: Y_1(t)-Y_2(t) \end{aligned}$$

и покажем, что $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}Y_i(t) = 0$, $i=1,2$. Действительно, согласно лемме 8.1 функции $g_2(y) = \mathbb{E}\exp\big(-e^y(1-W)\big)1_{\{1-W>e^{-y}\}}$ и $g_3(y) = \mathbb{E}(1-\exp(-e^y(1-W)))1_{\{1-W\leq e^{-y}\}}$ являются непосредственно интегрируемыми по Риману на $[0,\infty)$. Отсюда и из ключевой теоремы восстановления следует, что

$$\mathbb{E}Y_1(t) = \int_{[0,\,t]} g_2(t-y)\mathrm{d}U(y) \ \to\ 0, \quad t\to\infty$$

и

$$\mathbb{E}Y_2(t) = \int_{[0,\,t]} g_3(t-y)\mathrm{d}U(y) \ \to\ 0, \quad t\to\infty,$$

что и требовалось.

Доказательство леммы 2.1 завершается объединением выводов всех четырех шагов.
Доказательство леммы 2.2. Если распределение случайной величины $|\ln W|$ нерешетчато, то *по сути* доказательство леммы 2.2 не отличается от доказательства леммы 2.1. Дополнительных рассуждений требует лишь ситуация, когда распределение $|\ln W|$ является l-решетчатым для некоторого $l>0$. При этом модификация доказательства леммы 2.1 необходима лишь для шага 1. Для реализации шагов 2-4 нужно воспользоваться леммой 8.2 из Приложения.

Шаг 1. Зафиксируем число $\gamma > 0$ и пусть $m \in \mathbb{N}$ таково, что $\gamma \le ml$. Для выбранного γ и $\varepsilon > 0$ воспользуемся неравенством

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{\nu(R(t)) - \nu(t)}{a(t)} 1_{\left\{0<R(t)-t\le\gamma\right\}} > \varepsilon \middle| R(t) \right\} \le \frac{U(t+ml) - U(t)}{\varepsilon a(t)}.$$

Отсюда, из соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \big(U(t+ml) - U(t) \big) = \frac{ml}{\mathbb{E}|\ln W|}$$

и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что

$$\frac{\nu(R(t)) - \nu(t)}{a(t)} 1_{\left\{0<R(t)-t\le\gamma\right\}} \overset{P}{\to} 0, \quad t \to \infty,$$

чем и завершается доказательство шага 1.

4 Доказательство леммы 2.3

Достаточно показать, что

$$K(t) - K_{[t]} \overset{P}{\to} 0 \ \text{ и } \ M(t) - M_{[t]} \overset{P}{\to} 0, \quad t \to \infty, \tag{21}$$

и воспользоваться приемом Крамера-Уолда. В силу легко проверяемого неравенства $\mathbb{P}(M(t) \ne M_{[t]}) \le \mathbb{P}(K(t) \ne K_{[t]})$, лишь первое утверждение требует доказательства.

Докажем сначала, что для любого $x > 0$

$$K(t + x\sqrt{t}) - K(t - x\sqrt{t}) \overset{P}{\to} 0, \quad t \to \infty. \tag{22}$$

Из (19) для всех для достаточно больших t получаем

$$\mathbb{E}\big(K(t + x\sqrt{t}) - K(t - x\sqrt{t})\big) = \int_{[0,\,\infty)} \big(\varphi((t - x\sqrt{t})e^{-y}) - \varphi((t + x\sqrt{t})e^{-y})\big) \mathrm{d}U(y),$$

где $\varphi(y) = \mathbb{E}e^{-y(1-W)}$. Так как функция $-\varphi'(y)$ не возрастает, то по теореме о среднем значении для дифференцируемых функций

$$\varphi\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big) - \varphi\big((t + x\sqrt{t})e^{-y}\big) \le -\varphi'\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big) 2x\sqrt{t}e^{-y}.$$

Поэтому

$$\mathbb{E}\big(K(t + x\sqrt{t}) - K(t - x\sqrt{t})\big) \le \frac{2x\sqrt{t}}{t - x\sqrt{t}} \int_{[0,\,\infty)} \big(-\varphi'\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big)\big)(t - x\sqrt{t})e^{-y} \mathrm{d}U(y).$$

Согласно лемме 8.1 функция $g_4(y) = -\varphi'(e^y)e^y$ является непосредственно интегрируемой по Риману на $\mathbb{R}$. Отсюда и из леммы 8.2 вытекает, что

$$\int_{[0,\,\infty)} \big(-\varphi'\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big)\big)(t - x\sqrt{t})e^{-y} \mathrm{d}U(y) = O(1), \quad t \to \infty.$$

Таким образом, для любого $x>0$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\big(K(t+x\sqrt{t})-K(t-x\sqrt{t})\big)=0,$$

что влечет (22).

Поскольку процесс $\big(K(s)\big)_{s\geq 0}$ не убывает с вероятностью единица, то для любого $x>0$

$$\begin{aligned}|K_{[t]}-K(t)| &= |K(\tau_{[t]})-K(t)|1_{\{t-x\sqrt{t}\leq\tau_{[t]}\leq t+x\sqrt{t}\}}\\ &+ |K(\tau_{[t]})-K(t)|1_{\{|\tau_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}}\\ &\leq K(t+x\sqrt{t})-K(t-x\sqrt{t})+|K(\tau_{[t]})-K(t)|1_{\{|\tau_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}}.\end{aligned}$$

Значит для любого $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|K_{[t]}-K(t)|>2\varepsilon\} &\leq \mathbb{P}\{K(t+x\sqrt{t})-K(t-x\sqrt{t})>\varepsilon\}\\ &+ \mathbb{P}\{|K(\tau_{[t]})-K(t)|1_{\{|\tau_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}}>\varepsilon\}\\ &\leq \mathbb{P}\{K(t+x\sqrt{t})-K(t-x\sqrt{t})>\varepsilon\}+\mathbb{P}\{|\tau_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}.\end{aligned}$$

Учитывая (22) и используя центральную предельную теорему, получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\mathbb{P}\{|K_{[t]}-K(t)|>2\varepsilon\}\leq\mathbb{P}\{|\mathcal{N}(0,1)|>x\},$$

где $\mathcal{N}(0,1)$ обозначает случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение. Устремляя x к ∞, убеждаемся в справедливости первого из соотношений в (21), что и требовалось.

5 Доказательство теоремы 1.2

Согласно лемме 2.3 достаточно доказать, что

$$L(e^{ut})\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}R_{\alpha,c}(u),\quad t\to\infty.$$

Поскольку условие (3) влечет равенство $\mathbb{E}|\ln W|=\infty$, то, применяя лемму 2.1, заключаем, что желаемое утверждение эквивалентно соотношению

$$\sum_{k\geq 0}1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}R_{\alpha,c}(u),\quad t\to\infty. \tag{23}$$

Введем ряд обозначений, используемых лишь в этом разделе и в лемме 8.4 из Приложения:
$D:=D[0,\infty)$ – пространство Скорохода функций, заданных на $[0,\infty)$, непрерывных справа и имеющих конечные пределы слева;
$M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ – множество радоновских точечных мер на $[0,\infty)\times(0,\infty]$, наделенное грубой (vague) топологией;

$C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$ – множество неотрицательных непрерывных функций, заданных на $[0,\infty)\times(0,\infty]$ и имеющих компактный носитель[1];
$\mu_{\alpha,\,c}$ – мера на $(0,\infty]\times(0,\infty]$ такая, что

$$\mu_{\alpha,\,c}\big\{(u,v):u>x_1 \text{ или } v>x_2\big\}=x_1^{-\alpha}+c^{-1}x_2^{-\alpha},\quad x_1x_2>0,$$

здесь константа c та же, что и в (3).

Напомним также, что обозначения $N_\infty^{(\alpha,\,c)}$, $\nu_{\alpha,\,c}$, $\big(X_\alpha(t)\big)$ и $\big(S_n\big)$ были введены перед формулировками теоремы 1.2 и леммы 2.1, соответственно.

Хорошо известно, что условие $\mathbb{P}\{|\ln W|>x\}\sim x^{-\alpha}\ell(x)$, где $\alpha\in(0,1)$, гарантирует выполнение соотношения

$$\frac{S_{[ut]}}{c(t)}\ \Rightarrow\ X_\alpha(u),\quad t\to\infty$$

в D в J_1 топологии Скорохода, где $c(t)$ – любая положительная функция, удовлетворяющая соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}tc^{-\alpha}(t)\ell(c(t))=1$ (см. замечание 1.6(I) по поводу существования таких функций). Кроме того, имеет место сходимость

$$\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)}\ \Rightarrow\ X_\alpha(u),\quad t\to\infty \tag{24}$$

в D в J_1 топологии Скорохода, где $S_{[ut]-1}=0$ для $0\le u<1/t$. Действительно, согласно теореме 3 [6] очевидная сходимость конечномерных распределений влечет сходимость в J_1 топологии, поскольку для каждого $t>0$ траектории процесса в левой части (24) не убывают почти наверное, а предельный субординатор является стохастически непрерывным. Далее, согласно утверждению 3.21 [24] условие $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>x\}\sim c^{-1}x^{-\alpha}\ell(x)$ влечет сходимость

$$\sum_{k\ge1}\varepsilon_{(k/t,\,\eta_k/c(t))}\ \Rightarrow\ N_\infty^{(\alpha,\,c)},\quad t\to\infty$$

в $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ в грубой топологии. По определению грубой сходимости последнее эквивалентно сходимости одномерных распределений

$$\sum_{k\ge1}g\big(k/t,\,\eta_k/c(t)\big)\ \overset{d}{\to}\ \sum_m g(t_m,\,j_m),\quad t\to\infty \tag{25}$$

для любых функций $g\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$.

Если бы скачки случайного блуждания имели такое же распределение как $|\ln W|$ и не зависели бы от последовательности $\big(\eta_k\big)=\big(|\ln(1-W_k)|\big)$, то предельное соотношение (23) вытекало бы из следствия 2.3 работы [23]. В нашем случае, когда упомянутая независимость отсутствует, доказательство Микоша и Резника все еще применимо, за исключением того, что соотношение

$$\left(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)},\,\sum_{k\ge1}\varepsilon_{(k/t,\,\eta_k/c(t))}\right)\ \Rightarrow\ (X_\alpha(u),N_\infty^{(\alpha,\,c)}),\quad t\to\infty \tag{26}$$

[1] Обратим внимание читателя на то, что по второй координате роли точек 0 и ∞ меняются, то есть компактами в $[0,\infty)\times(0,\infty]$ будут, в частности, множества $[0,a]\times[b,\infty]$ при $a,b>0$.

в пространстве $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$, наделенном продакт топологией, порожденной J_1 топологией Скорохода и грубой топологией, *должно быть доказано*, в то время, как в ситуации, рассматриваемой в статье [23], оно выполняется автоматически. Действительно, если соотношение (26) верно, то дословное повторение последней части доказательства теоремы 2.1 [23] позволяет утверждать, что

$$\sum_{k\geq 0}\varepsilon_{(S_k/c(t),\,\eta_{k+1}/c(t))} \ \Rightarrow\ \sum_m \varepsilon_{(X_\alpha(t_m),\,j_m)},\quad t\to\infty$$

в пространстве $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Переход от последнего соотношения к (23) осуществляется так же, как в доказательстве следствия 2.3 [23].

Согласно лемме 8.4 для доказательства соотношения (26) достаточно проверить, что для любой функции $g\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$ имеет место слабая сходимость

$$\Big(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)},\sum_{k\geq 1} g\big(k/t,\,\eta_k/c(t)\big)\Big)\ \Rightarrow\ \big(X_\alpha(u),\sum_m g(t_m,\,j_m)\big),\quad t\to\infty$$

в $D\times[0,\infty)$.

Полагая вторые координаты функциями в D, принимающими постоянное значение, и используя лемму 2.6 [18], заключаем, что достаточно убедиться в сходимости конечномерных распределений, то есть в том, что

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i\frac{S_{[u_it]-1}}{c(t)}+\gamma\sum_{k\geq 1} g\big(k/t,\eta_k/c(t)\big)\ \overset{d}{\to}\ \sum_{i=1}^n\gamma_i X_\alpha(u_i)+\gamma\sum_m g(t_m,\,j_m),\quad t\to\infty \tag{27}$$

для любого $n\in\mathbb{N}$, любых $\gamma,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\geq 0$ и любых $0<u_1<u_2<\ldots<u_n$, и в индивидуальной плотности координат.

Плотность координат следует из (24) и (25) соответственно. По техническим соображениям нам будет удобнее проверить справедливость соотношения

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i\frac{S_{[u_it]}}{c(t)}+\gamma\sum_{k\geq 1} g\big(k/t,\eta_k/c(t)\big)\ \overset{d}{\to}\ \sum_{i=1}^n\gamma_i X_\alpha(u_i)+\gamma\sum_m g(t_m,\,j_m),\quad t\to\infty, \tag{28}$$

которое эквивалентно (27) в силу леммы Слуцкого.

Установим (28), используя метод доказательства утверждения 3.21 [24]. Для $z>0$ имеем

$$\begin{aligned}
\phi_t(z) &:= \mathbb{E}\exp\Big(-z\Big(\sum_{i=1}^n\gamma_i\frac{S_{[u_it]}}{c(t)}+\gamma\sum_{k\geq 1}g\big(k/t,\,\eta_k/c(t)\big)\Big)\Big)\\
&= \mathbb{E}\exp\Big(-z\Big(\sum_{i=1}^n\frac{\gamma_i}{c(t)}\sum_{k\geq 1}|\ln W_k|1_{\{k\leq u_it\}}+\gamma\sum_{k\geq 1}g\big(k/t,\eta_k/c(t)\big)\Big)\Big)\\
&= \prod_{k\geq 1}\mathbb{E}\exp\Big(-z\Big(\frac{|\ln W|}{c(t)}\sum_{i=1}^n\gamma_i 1_{\{k\leq u_it\}}+\gamma g\big(k/t,\,|\ln(1-W)|/c(t)\big)\Big)\Big)\\
&= \prod_{k\geq 1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}\big(1-K(z,u,v,k/t)\big)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in \mathrm{d}u,\frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\},
\end{aligned}$$

где $K(z,u,v,w) := 1-\exp\Big(-z\Big(u\sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{w\le u_i\}}+\gamma g(w,v)\Big)\Big)$. Обозначим через C (компактный) носитель g. Ясно, что для любого $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in \mathrm{d}u,\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in \mathrm{d}v\Big\}\\ &\quad\le\ \mathbb{E}\Big(1-\exp\Big(-\frac{z|\ln W|}{c(t)}\sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{k\le u_i t\}}\Big)\Big)+\mathbb{P}\Big\{\Big(\frac{|\ln W|}{c(t)},\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\Big)\in C\Big\}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in \mathrm{d}u, \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in \mathrm{d}v\Big\}=0. \tag{29}$$

Очевидно, что для достаточно малых значений $x_0>0$ найдется число $M=M(x_0)>0$ такое, что

$$0\le -\ln(1-x)-x\le Mx^2,\qquad 0<x\le x_0.$$

Отсюда, учитывая (29), получаем для достаточно больших t

$$\begin{aligned}&0\le -\ln\phi_t(z)-\sum_{k\ge 1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in \mathrm{d}u,\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in \mathrm{d}v\Big\}\\ &\quad\le\ M\sum_{k\ge 1}\Big(\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in \mathrm{d}u,\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in \mathrm{d}v\Big\}\Big)^2.\end{aligned}$$

Используя (29) еще раз, заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty}\Big(-\ln\phi_t(z)-\sum_{k\ge 1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in \mathrm{d}u,\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in \mathrm{d}v\Big\}\Big)=0 \tag{30}$$

для каждого $z>0$.

Условия (3) влекут соотношения

$$t\mathbb{P}\Big\{\Big(\frac{|\ln W|}{c(t)},\frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\Big)\in\cdot\Big\}\ \overset{v}{\to}\ \mu_{\alpha,c},\quad t\to\infty \tag{31}$$

и

$$t\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in\cdot\Big\}\ \overset{v}{\to}\ \nu_{\alpha,c},\quad t\to\infty, \tag{32}$$

где символ $\overset{v}{\to}$ обозначает грубую сходимость мер. Заметим, что мера $\mu_{\alpha,c}$ сосредоточена на координатных осях. Этим объясняется независимость компонент предельного вектора в соотношении (26), а также формула интегрирования

$$\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f(u,v)\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u\times\mathrm{d}v)=\alpha\int_0^\infty f(u,0)u^{-\alpha-1}\mathrm{d}u+\alpha c^{-1}\int_0^\infty f(0,v)v^{-\alpha-1}\mathrm{d}v, \tag{33}$$

имеющая место для всех функций f, для которых интегралы корректно определены.

Из соотношения (31) получаем

$$\begin{aligned}\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v) \;&:=\; \sum_{k\ge 1}\varepsilon_{k/t}(\mathrm{d}x)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\\ &\overset{v}{\to}\; \mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u\times\mathrm{d}v),\quad t\to\infty,\end{aligned}\tag{34}$$

где $\varepsilon_{k/t}$ обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке k/t, в то время как соотношение (32) дает:

$$\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,(0,\infty],\mathrm{d}v)\;\overset{v}{\to}\;\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}((0,\infty]\times\mathrm{d}v),\quad t\to\infty.\tag{35}$$

Воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge 1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)}&K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\\ &=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,x)\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\end{aligned}$$

и покажем, что для каждого $z>0$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}&\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,x)\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\\ &=\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}K(z,u,v,x)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v).\end{aligned}\tag{36}$$

Это соотношение не следует автоматически из (34), так как при фиксированном z функция $K(z,\cdot)$ не сосредоточена на компакте в пространстве $(0,\infty]\times(0,\infty]\times[0,\infty)$. Для доказательства (36) заметим, что в этом же пространстве функция $(u,v,x)\mapsto K(z,u,v,x)1_{\{u\ge 1\ \text{или}\ x>u_n\}}$ имеет компактный носитель (см. сноску на стр. 13) при любом фиксированном $z>0$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}&\int K(z,u,v,x)1_{\{u<1,\,x\le u_n\}}\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\\ &=\int K(z,u,v,x)1_{\{u<1,\,x\le u_n\}}\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v).\end{aligned}\tag{37}$$

Для простоты выкладок докажем это соотношение для случая $n=1$[2]. Так как при фиксированном z функция

$$\hat{K}(z,u,v,x):=\begin{cases}\frac{1-\exp\left(-z(u\gamma_1+\gamma g(x,v))\right)}{u\gamma_1+\gamma g(x,v)}, & u\gamma_1+\gamma g(x,v)\ne 0,\\ z, & u\gamma_1+\gamma g(x,v)=0\end{cases}$$

непрерывна и ограничена, то для доказательства (37) достаточно установить слабую сходимость мер

$$u1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\;\Rightarrow\;u1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v),\quad t\to\infty,\tag{38}$$

[2]Общий случай проверяется путем разбиения области интегрирования по переменной x на интервалы $[u_{i-1},u_i]$ и проверкой сходимости интегралов по каждому из промежутков.

и

$$g(x,v)1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v) \;\Rightarrow\; g(x,v)1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mathrm{d}x\mu_{\alpha,\,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v), \quad t\to\infty. \tag{39}$$

Из (34) следует, что в формулах (38) и (39) имеет место грубая сходимость, так как если функция f непрерывна и имеет компактный носитель, то этим же свойством обладают функции $u1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}f$ и $g(x,v)1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}f$. Согласно теореме 30.8 (ii) [5] эта сходимость будет усилена до слабой сходимости, если мы покажем, что

$$\lim_{t\to\infty}\int u1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\int u1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mathrm{d}x\mu_{\alpha,\,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v) \tag{40}$$

и

$$\lim_{t\to\infty}\int g(x,v)1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\int g(x,v)1_{\{u<1,\,x\le u_1\}}\mathrm{d}x\mu_{\alpha,\,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v). \tag{41}$$

Допредельное выражение в левой части (40) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{[u_1t]}\int_{[0,1)\times(0,\,\infty)}u\mathbb{P}\Big\{\frac{|\ln W|}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\ \frac{|\ln(1-W)|}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}=\frac{[u_1t]}{c(t)}\mathbb{E}|\ln W|1_{\{|\ln W|<c(t)\}},$$

что в силу (3) стремится к $\alpha(1-\alpha)^{-1}u_1$ при $t\to\infty$. Очевидно, что найденное предельное значение совпадает (по величине) с правой частью (40). Докажем справедливость равенства (41). Положим $\hat g(x,v):=g(x,v)1_{\{x\le u_1\}}$. Ясно, что $\hat g\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$. Так как функция $\hat g(x,v)1_{\{u\ge1\}}$ имеет компактный носитель, то равенство (41) будет оправдано, если мы покажем, что

$$\lim_{t\to\infty}\int \hat g(x,v)\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)=\int \hat g(x,v)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,\,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v). \tag{42}$$

Для проверки этого факта достаточно заметить, что эквивалентная форма записи (42) имеет вид

$$\lim_{t\to\infty}\int \hat g(x,v)\mu^{(t)}(\mathrm{d}x,(0,\infty],\mathrm{d}v)=\int \hat g(x,v)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,\,c}((0,\infty],\mathrm{d}v),$$

причем последнее соотношение следует из (35). Итак, формула (36) доказана.

Используя формулу интегрирования (33) и равенство $g(x,0)=0$, заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\,\infty)\times[0,\,\infty)\times[0,\,\infty)}K(z,u,v,x)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,\,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\\
&=\alpha\int_0^\infty\int_0^\infty\Big(1-\exp\Big(-zu\sum_{i=1}^n\gamma_i1_{\{x\le u_i\}}\Big)\Big)\mathrm{d}xu^{-\alpha-1}\mathrm{d}u\\
&\quad+\alpha c^{-1}\int_0^\infty\int_0^\infty\Big(1-\exp(-z\gamma g(x,v))\Big)\mathrm{d}xv^{-\alpha-1}\mathrm{d}v\\
&\qquad=-\ln\mathbb{E}\exp\big(-z\sum_{i=1}^n\gamma_iX_\alpha(u_i)\big)-\ln\mathbb{E}\exp\big(-z\gamma\sum_m g(t_m,\,j_m)\big)
\end{aligned}$$

для каждого $z > 0$. Из этой формулы с учетом (36) и (30) получаем (28) и, следовательно, совместную сходимость (26).

Для нахождения распределения $R_{\alpha,\, c}(u)$ зафиксируем $\delta > 0$, положим

$$R^{(\delta)}_{\alpha,\, c}(u) := \sum_{k\geq 0} 1_{\{S_k\leq u<S_k+\eta_{k+1},\eta_{k+1}>\delta\}}$$

и воспользуемся равенством

$$\mathbb{E}e^{-zR^{(\delta)}_{\alpha,\, c}(u)} = \mathbb{E}\exp\bigg(-\int_{[0,\,\infty)}\int_{(\delta,\,\infty]}\big(1-e^{-z1_{\{X_\alpha(s)\leq u<X_\alpha(s)+y\}}}\big)\mathrm{d}s\nu_{\alpha,\,c}(\mathrm{d}y)\bigg), \quad z\geq 0,$$

являющимся частным случаем формулы, приведенной на с. 136 [23]. Отсюда, после ряда естественных преобразований, выводим, что

$$\mathbb{E}e^{-zR^{(\delta)}_{\alpha,\, c}(u)} = \mathbb{E}\exp\bigg(-c^{-1}\int_{[0,\,u]}\big((u-s)\vee\delta\big)^{-\alpha}\mathrm{d}X^{\leftarrow}_\alpha(s)(1-e^{-z})\bigg), \quad z\geq 0.$$

Переходя к пределу $\delta\downarrow 0$ и используя теорему непрерывности для преобразований Лапласа, получаем

$$\mathbb{E}e^{-zR_{\alpha,\, c}(u)} = \mathbb{E}\exp\bigg(-c^{-1}\int_{[0,\,u]}(u-s)^{-\alpha}\mathrm{d}X^{\leftarrow}_\alpha(s)(1-e^{-z})\bigg), \quad z\geq 0.$$

Таким образом, распределение $R_{\alpha,\,c}(u)$ является смешанным пуассоновским с параметром $c^{-1}\int_{[0,\,u]}(u-s)^{-\alpha}\mathrm{d}X^{\leftarrow}_\alpha(s)$. В статье [21] показано, что распределение последнего интеграла является показательным с единичным средним. Поэтому распределение $R_{\alpha,\,c}(u)$ является геометрическим с вероятностью успеха $c(c+1)^{-1}$, что и утверждалось. Теорема 1.2 доказана.

6 Доказательство теоремы 1.4

Если мы убедимся в справедливости соотношения

$$\frac{1-F(t)}{1-G(t)}L(e^{ut}) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} W_{\alpha,\,\beta}(u), \quad t\to\infty, \tag{43}$$

где $F(t) := \mathbb{P}\{|\ln W|\leq t\}$ и $G(t) := \mathbb{P}\{|\ln(1-W)|\leq t\}$, $t\geq 0$, то ввиду леммы 2.3 из него будет следовать (5).

Так как первое из условий (4) влечет равенство $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$, то в силу леммы 2.1 достаточно проверить, что

$$\frac{1-F(t)}{1-G(t)}\sum_{k\geq 0}1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} W_{\alpha,\,\beta}(u), \quad t\to\infty. \tag{44}$$

Согласно теореме 2.10 [21] при $t\to\infty$

$$\frac{1-F(t)}{1-G(t)}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\big(1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}\big|S_k\big) = \frac{1-F(t)}{1-G(t)}\sum_{k\geq 0}\big(1-G(ut-S_k)\big)1_{\{S_k\leq ut\}} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} W_{\alpha,\,\beta}(u).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0}\big(1_{\{S_k\leq t<S_k+\eta_{k+1}\}}-\mathbb{E}\big(1_{\{S_k\leq t<S_k+\eta_{k+1}\}}\big|S_k\big)\big)\Big)^2=\int_{[0,\,t]}G(y)(1-G(y))\mathrm{d}U(y).$$

Так же, как это делалось в доказательстве леммы 5.2 [21], можно показать, что

$$\int_{[0,\,t]}G(y)(1-G(y))\mathrm{d}U(y)\ \sim\ \mathrm{const}\,\frac{1-G(t)}{1-F(t)},\quad t\to\infty.$$

Отсюда, из неравенства Маркова и условий теоремы следует, что

$$\frac{1-F(t)}{1-G(t)}\sum_{k\geq 0}\big(1_{\{S_k\leq t<S_k+\eta_{k+1}\}}-\mathbb{E}\big(1_{\{S_k\leq t<S_k+\eta_{k+1}\}}\big|S_k\big)\big)\ \overset{P}{\to}\ 0,\quad t\to\infty.$$

Поскольку нормирующий множитель правильно меняется при $t\to\infty$, то использование приема Крамера-Уолда дает возможность утверждать, что

$$\frac{1-F(t)}{1-G(t)}\sum_{k\geq 0}\big(1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}-\mathbb{E}\big(1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}\big|S_k\big)\big)\ \overset{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow}\ 0,\quad t\to\infty.$$

Таким образом, соотношение (44), а значит и (43), выполняются. Теорема 1.4 доказана.

7 Доказательство теоремы 1.5

Напомним введенные ранее обозначения: $G(t)=\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|\leq t\}$, $\big(S_n\big)$ – стартующее из нуля случайное блуждание с шагами $|\ln W_k|$, а $\eta_n=|\ln(1-W_n)|$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть, далее,

$$q(t):=\sqrt{\mu^{-1}\int_0^t\big(1-G(y)\big)\mathrm{d}y}.$$

Утверждение 7.1. *Если $\mu=\mathbb{E}|\ln W|<\infty$ и выполнено условие* (6), *то*

$$\frac{\sum_{k\geq 0}1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}-\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\big(1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}\big|S_k\big)}{q(t)}\ \overset{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow}\ V(u),\quad t\to\infty.$$

Доказательство. Мы ограничимся проверкой сходимости двумерных распределений. Общий случай громоздок и не требует новых идей.

Зафиксируем $0<u_1<u_2$. Согласно приему Крамера-Уолда достаточно установить, что при $t\to\infty$

$$\frac{\sum_{j=1}^2\gamma_j\sum_{k\geq 0}1_{\{S_k\leq u_jt\}}\big(1_{\{S_k+\eta_{k+1}>u_jt\}}-(1-G(u_jt-S_k))\big)}{q(t)}\ \overset{d}{\to}\ \gamma_1V(u_1)+\gamma_2V(u_2)\quad(45)$$

для любых $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}$.

Заметим, что случайная величина $\gamma_1 V(u_1)+\gamma_2 V(u_2)$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией

$$\gamma_1^2 u_1^{1-\beta}+\gamma_2^2 u_2^{1-\beta}+2\gamma_1\gamma_2(u_2^{1-\beta}-(u_2-u_1)^{1-\beta}).$$

Введем σ-алгебры $\mathcal{F}_0:=\{\Omega,\oslash\}$, $\mathcal{F}_k:=\sigma\big(W_1,\ldots,W_k\big)$, $k\in\mathbb{N}$. Поскольку

$$\mathbb{E}\bigg(\sum_{j=1}^2 \gamma_j 1_{\{S_k\le u_j t\}}\big(1_{\{S_k+\eta_{k+1}>u_j t\}}-(1-G(u_j t-S_k))\big)\bigg|\mathcal{F}_k\bigg)=0,$$

то для доказательства (45) можно применить мартингальную центральную предельную теорему (следствие 3.1 [17]), согласно которой достаточно убедиться в том, что

$$\sum_{k\ge 0}\mathbb{E}\big(X_{tk}^2|\mathcal{F}_k\big)\ \overset{P}{\to}\ \gamma_1^2 u_1^{1-\beta}+\gamma_2^2 u_2^{1-\beta}+2\gamma_1\gamma_2(u_2^{1-\beta}-(u_2-u_1)^{1-\beta}),\quad t\to\infty, \tag{46}$$

где

$$X_{tk}:=\frac{\sum_{j=1}^2 \gamma_j 1_{\{S_k\le u_j t\}}\big(1_{\{S_k+\eta_{k+1}>u_j t\}}-(1-G(u_j t-S_k))\big)}{q(t)},$$

и что для всех $\varepsilon>0$

$$\sum_{k\ge 0}\mathbb{E}\big(X_{tk}^2 1_{\{|X_{tk}|>\varepsilon\}}|\mathcal{F}_k\big)\ \overset{P}{\to}\ 0,\quad t\to\infty. \tag{47}$$

Неравенство $|X_{tk}|\le\big(|\gamma_1|+|\gamma_2|\big)/q(t)$ показывает, что в наших условиях соотношение (47) следует из (46).

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge 0}\mathbb{E}\big(X_{tk}^2|\mathcal{F}_k\big) &= \frac{\sum_{j=1}^2 \gamma_j^2\sum_{k\ge 0}1_{\{S_k\le u_j t\}}(1-G(u_j t-S_k))G(u_j t-S_k)}{q^2(t)}\\ &+ \frac{2\gamma_1\gamma_2\sum_{k\ge 0}1_{\{S_k\le u_1 t\}}(1-G(u_2 t-S_k))G(u_1 t-S_k)}{q^2(t)}.\end{aligned}$$

Покажем, что при $t\to\infty$

$$\frac{\sum_{k\ge 0}1_{\{S_k\le u_1 t\}}(1-G(u_2 t-S_k))}{q^2(t)}=\frac{\int_{[0,\,u_1]}\big(1-G(t(u_2-y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)}\ \to\ u_2^{1-\beta}-(u_2-u_1)^{1-\beta} \tag{48}$$

почти наверное. По усиленному закону больших чисел, примененному к процессу $\big(\nu(t)\big)$, соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\nu(ty)}{\mu^{-1}t}=y$$

выполняется почти наверное для всех $y\in[0,u_1]$. Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-G(t(u_2-y))}{1-G(t)}=(u_2-y)^{-\beta}$$

равномерно по $y \in [0, u_1]$. Значит[3]

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,u_1]} \big(1 - G(t(u_2 - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{\mu^{-1}t(1 - G(t))} = \int_0^{u_1} (u_2 - y)^{-\beta}\mathrm{d}y = (1-\beta)^{-1}\big(u_2^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}\big)$$

почти наверное. Остается заметить, что $\int_0^t \big(1 - G(y)\big)\mathrm{d}y \sim (1-\beta)^{-1}t(1 - G(t))$.

Для доказательства того, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,u_1]} \big(1 - G(t(u_2 - y))\big)\big(1 - G(t(u_1 - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)} = 0 \tag{49}$$

почти наверное, зафиксируем $\varepsilon \in (0, u_1)$ и, воспользовавшись монотонностью функции $1 - G(t)$, получим

$$\frac{\int_{[0,\,u_1-\varepsilon]} \big(1 - G(t(u_2 - y))\big)\big(1 - G(t(u_1 - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)} \le \frac{\big(1 - G(\varepsilon t)\big)\int_{[0,\,u_1-\varepsilon]} \big(1 - G(t(u_2 - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)}.$$

Используя соотношение (48), в котором вместо u_1 подставлено $u_1 - \varepsilon$, заключаем, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю почти наверное при $t \to \infty$. Далее,

$$\frac{\int_{(u_1-\varepsilon,\,u_1]} \big(1 - G(t(u_2 - y))\big)\big(1 - G(t(u_1 - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)} \le \frac{\int_{(u_1-\varepsilon,\,u_1]} \big(1 - G(t(u_2 - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)},$$

причем при $t \to \infty$ предел правой части этого неравенства равен $(u_2 - u_1 + \varepsilon)^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}$. Для завершения доказательства (49) достаточно теперь устремить ε к нулю.

Таким образом, мы установили, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k\ge 0} 1_{\{S_k \le u_1 t\}}\big(1 - G(u_2 t - S_k)\big)G(u_1 t - S_k)}{q^2(t)} = u_2^{1-\beta} - (u_2 - u_1)^{1-\beta}$$

почти наверное.

Покажем теперь, что при $t \to \infty$

$$\frac{\sum_{k\ge 0} 1_{\{S_k \le ut\}}\big(1 - G(ut - S_k)\big)}{q^2(t)} = \frac{\int_{[0,\,u]} \big(1 - G(t(u - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)} \overset{P}{\to} u^{1-\beta}. \tag{50}$$

Заметим прежде всего, что для любого $\varepsilon \in (0, u)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,u-\varepsilon]} \big(1 - G(t(u - y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)} = u^{1-\beta} - \varepsilon^{1-\beta}$$

[3] Для доказательства подобного соотношения в более общей ситуации см. лемму А.6 [20].

почти наверное, в чем можно убедиться аналогично тому, как было доказано (48). Так как правая часть последнего равенства стремится к $u^{1-\beta}$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то для завершения доказательства соотношения (50) осталось проверить, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \mathbb{P}\bigg\{\frac{\int_{(u-\varepsilon,\,u]}\big(1-G(t(u-y))\big)\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)} > \delta\bigg\} = 0.$$

В силу неравенства Маркова последнее будет справедливо, если мы покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{\int_{(u-\varepsilon,\,u]}\big(1-G(t(u-y))\big)\mathrm{d}U(ty)}{q^2(t)} = 0. \tag{51}$$

Используя сначала лемму 8.3, а затем правильное изменение функции $1-G(t)$, получаем

$$\int_{((u-\varepsilon)t,\,ut]}\big(1-G(ut-y)\big)\mathrm{d}U(y) \;\sim\; \mu^{-1}\int_0^{\varepsilon t}\big(1-G(y)\big)\mathrm{d}y \;\sim\; \varepsilon^{1-\beta}q^2(t), \quad t\to\infty,$$

что доказывает (51). Значит, соотношение (50) выполняется.

Наконец, применяя подход, подобный тому, что был использован для доказательства (49) (или, еще проще, анализируя асимптотику первого момента), убеждаемся в том, что при $t\to\infty$

$$\frac{\sum_{k\geq 0}1_{\{S_k\leq ut\}}\big(1-G(ut-S_k)\big)^2}{q^2(t)} = \frac{\int_{[0,\,u]}\big(1-G(t(u-y))\big)^2\mathrm{d}\nu(ty)}{q^2(t)} \overset{P}{\to} 0. \tag{52}$$

Сходимость по вероятности в (46) следует теперь из (48), (49), (50) и (52) (последними двумя соотношениями нужно воспользоваться отдельно для $u=u_1$ и для $u=u_2$). $\square$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.5. Если выполнены условия (6) и $\mu = \mathbb{E}|\ln W| < \infty$ (принадлежность распределения случайной величины $|\ln W|$ области притяжения устойчивого закона не требуется), то, согласно утверждению 7.1,

$$\frac{\sum_{k\geq 0}1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}} - \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\big(1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}\big|S_k\big)}{q(t)} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} V(u), \quad t\to\infty. \tag{53}$$

Далее, если выполнены предположения одного из пунктов (а)-(в), то в соответствии с теоремой 2.7 [21]

$$\begin{aligned}&\frac{\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\big(1_{\{S_k\leq ut<S_k+\eta_{k+1}\}}\big|S_k\big) - \mu^{-1}\int_0^{ut}\big(1-G(y)\big)\mathrm{d}y}{g(t)}\\ &\quad= \frac{\sum_{k\geq 0}\big(1-G(ut-S_k)\big)1_{\{S_k\leq ut\}} - q^2(ut)}{g(t)} \quad \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \quad W_{\alpha,\beta}(u), \quad t\to\infty. \end{aligned}\tag{54}$$

При этом случаям (а) и (б) соответствует $\alpha=2$. Кроме того $g(t)=\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}\big(1-G(t)\big)$ в случае (а) и $g(t)=\mu^{-1-1/\alpha}c(t)\big(1-G(t)\big)$ в случаях (б) и (в).

Случаи (а), (б1) и (в1). Наша цель –проверка соотношения

$$\frac{L(e^{ut}) - q^2(ut)}{q(t)} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} V(u), \quad t \to \infty.$$

В силу леммы 2.3 этого будет достаточно для доказательства теоремы 1.5 в рассматриваемых случаях.

Так как предположения теоремы 1.5 влекут соотношения $\mu < \infty$ и $\lim_{t\to\infty} q(t) = \infty$, то согласно лемме 2.2 для доказательства интересующей нас сходимости достаточно убедиться в том, что

$$\frac{\sum_{k\geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} - q^2(ut)}{q(t)} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} V(u), \quad t \to \infty.$$

Если будет доказано соотношение

$$\lim_{t\to\infty} g(t)/q(t) = 0, \tag{55}$$

то желаемый результат будет следовать из (53) и (54).

Заметим сначала, что в силу утверждения 1.5.8 [7]

$$q^2(t) \ \sim \ \text{const}\, t^{1-\beta}\widehat{\ell}(t), \quad t \to \infty.$$

В случае (а) $g^2(t) \sim \text{const}\, t^{1-2\beta}(\widehat{\ell}(t))^2$, $t \to \infty$. Поэтому соотношение (55) выполняется (при $\beta = 0$ нужно заметить, что $\lim_{t\to\infty} \widehat{\ell}(t) = 0$). В случае (б1) $g^2(t) \sim \text{const}\, t^{1-2\beta}(\ell^*(t)\widehat{\ell}(t))^2$, $t \to \infty$, и справедливость (55) обеспечивается предположением (9). Наконец, в случае (в1) $g^2(t) \sim \text{const}\, t^{2/\alpha-2\beta}(\ell^*(t)\widehat{\ell}(t))^2$, $t \to \infty$, и (55) вытекает из условия (11).

Случаи (б2) и (в2). Рассуждая так же, как в предыдущих случаях, заключаем, что, во-первых, достаточно доказать соотношение

$$\frac{L(e^{ut}) - q^2(ut)}{g(t)} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} W_{\alpha,\beta}(u), \quad t \to \infty,$$

во-вторых, последнее будет следовать из сходимости

$$\frac{\sum_{k\geq 0} 1_{\{S_k \leq ut < S_k + \eta_{k+1}\}} - q^2(ut)}{g(t)} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} W_{\alpha,\,\beta}(u), \quad t \to \infty. \tag{56}$$

Если

$$\lim_{t\to\infty} g(t)/q(t) = \infty, \tag{57}$$

то (56) является следствием (53) и (54). Рассмотрим случай (в2), так как анализ случая (б2) аналогичен. Согласно условиям теоремы $g^2(t) \sim \text{const}\, t^{-2\beta+2/\alpha}\big(\ell^*(t)\widehat{\ell}(t)\big)^2$, $t \to \infty$. Поэтому при $\beta \in [0,\, 2/\alpha - 1)$ соотношение (57) выполняется автоматически, а в случае $\beta = 2/\alpha - 1$ – обеспечивается равенством (12). Теорема 1.5 доказана.

8 Приложение

Лемма 8.1 применяется в доказательствах лемм 2.1 и 2.3.

Лемма 8.1. *Пусть θ – случайная величина, принимающая значения в полуинтервале $(0,1]$. Тогда функции $g_0(y) := \mathbb{E}\exp(-e^y\theta) - \mathbb{E}\exp(-2e^y\theta)$ и $g_4(y) := e^y\mathbb{E}\theta\exp(-e^y\theta)$ являются непосредственно интегрируемыми по Риману на $\mathbb{R}$, функция $g_1(y) := \mathbb{E}\big(1-\exp\big(-e^y\theta\big)\big)$ – на полуоси $(-\infty,0]$; а функции $g_2(y) := \mathbb{E}\exp\big(-e^y\theta\big)1_{\{\theta>e^{-y}\}}$ и $g_3(y) := \mathbb{E}\big(1-\exp(-e^y\theta)\big)1_{\{\theta\le e^{-y}\}}$ – на полуоси $[0,\infty)$.*

Доказательство. Поскольку функции g_i, $i=0,4$ и g_3 неотрицательны, достаточно проверить их интегрируемость по Лебегу на $\mathbb{R}$ и $[0,\infty)$ соответственно, а также то, что функции $e^{-y}g_i(y)$, $i=0,3,4$ не возрастают (см., например, доказательство следствия 2.17 [9]). Первое свойство вытекает из равенств

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g_0(y)\mathrm{d}y &= \int_0^\infty y^{-1}\big(\mathbb{E}e^{-y\theta}-\mathbb{E}e^{-2y\theta}\big)\mathrm{d}y\\ &= \mathbb{E}\int_0^\infty y^{-1}\big(e^{-y\theta}-e^{-2y\theta}\big)\mathrm{d}y=\ln 2,\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} g_4(y)\mathrm{d}y=\mathbb{E}\int_0^\infty \theta e^{-y\theta}\mathrm{d}y=1$$

и оценок

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g_3(y)\mathrm{d}y &= \mathbb{E}\int_1^\infty y^{-1}\big(1-\exp(-y\theta)\big)1_{\{\theta\le y^{-1}\}}\mathrm{d}y\\ &= \mathbb{E}\int_\theta^1 y^{-1}\big(1-e^{-y}\big)\mathrm{d}y\le\int_0^1 y^{-1}\big(1-e^{-y}\big)\mathrm{d}y<\infty.\end{aligned}$$

При этом для оправдания последней цепочки оценок нужно использовть замену переменной и условие $\theta\in[0,1]$ п.н. Далее, при фиксированном $z\in(0,1]$ функция $y^{-1}(1-e^{-yz})e^{-yz}$ не возрастает на $[0,\infty)$. Значит и функция $e^{-y}g_0(y)$ не возрастает. По тем же соображениям, при фиксированном $z\in(0,1]$ функции $y^{-1}(1-e^{-yz})$ и $1_{\{z\le y^{-1}\}}$ не возрастают на $(0,\infty)$. Поэтому не возрастает и их произведение. Значит функция $e^{-y}g_3(y)$ не возрастает. Для функции g_4 необходимое свойство монотонности, очевидно, выполнено.

Поскольку функция g_1 неотрицательна и не убывает, достаточно проверить ее интегрируемость по Лебегу на $(-\infty,0]$:

$$\int_{-\infty}^0 g_1(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y^{-1}\mathbb{E}\big(1-e^{-y\theta}\big)\mathrm{d}y\le\int_0^1\mathbb{E}\theta dy\in(0,1].$$

Положительная функция $h(y) := \exp(-e^y)$ является непосредственно интегрируемой по Риману на $[0,\infty)$. Поскольку функция g_2 является сверткой h и функции распределения случайной величины $|\ln\theta|$, то функция g_2 непосредственно интегрируема по Риману на $[0,\infty)$ согласно утверждению 2.16(d) на с. 297 [8] . □

Обозначим через $\left(S_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ случайное блуждание, стартующее из нуля, приращения которого распределены так же, как и неотрицательная случайная величина ξ^*. Положим

$$U^*(t)=\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{S_n^*\leq t\},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Эти обозначения используются (без напоминания) в формулировках двух следующих утверждений, первое из которых - лемма 8.2, по-видимому известна. Мы приводим ее доказательство, поскольку оно не было обнаружено в доступных нам источниках.

Лемма 8.2. *Если функция $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ непосредственно интегрируема по Риману на $[0,\infty)$, то*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{[0,\,t]}f(t-y)\mathrm{d}U^*(y)<\infty.$$

Если же функция f непосредственно интегрируема по Риману на $(-\infty,0]$, то

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{[t,\,\infty)}f(t-y)\mathrm{d}U^*(y)<\infty.$$

Доказательство. Если распределение ξ^* нерешетчатое, то (даже более сильное) утверждение следует из ключевой теоремы восстановления. Предположим, что распределение ξ^* является l-решетчатым, $l>0$. Мы рассмотрим только случай непосредственной интегрируемости на $[0,\infty)$.

Поскольку

$$f(t)\leq\sum_{n\geq 1}\sup_{(n-1)l\leq s<nl}f(s)1_{[(n-1)l,\,nl)}(t),\quad t\geq 0,$$

то

$$\begin{aligned}\int_{[0,\,t]}f(t-y)\mathrm{d}U^*(y)&\leq\sum_{n\geq 1}\sup_{(n-1)l\leq s<nl}f(s)\big(U^*(t-nl)-U^*(t-(n-1)l)\big)\\&\leq U^*(l)\sum_{n\geq 1}\sup_{(n-1)l\leq s<nl}f(s).\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из субаддитивности U^* на $\mathbb{R}$. Остается заметить, что ряд в правой части этой цепочки неравенста сходится вследствие непосредственной интегрируемости по Риману функции f. $\square$

Лемма 8.3 применяется в доказательстве утверждения 7.1.

Лемма 8.3. *Пусть функция $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ не возрастает, $\lim_{t\to\infty}\int_{[0,\,t]}f(y)\mathrm{d}y=\infty$ и $0<\mathbb{E}\xi^*<\infty$. Для $0\leq a<b\leq 1$ выполняется соотношение*

$$\int_{[at,\,bt]}f(t-y)\mathrm{d}U^*(y)\ \sim\ (\mathbb{E}\xi^*)^{-1}\int_{(1-b)t}^{(1-a)t}f(y)\mathrm{d}y,\quad t\to\infty.$$

Доказательство. Если распределение ξ^* нерешетчатое или 1-решетчатое, то доказательство аналогично доказательству теоремы 4 [26], где анализировался случай $a = 0$, $b = 1$. Если распределение ξ^* является l-решетчатым, то распределение $l^{-1}\xi^*$ является 1-решетчатым. Отсюда, обозначая $f_l(t) := f(lt)$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{[at,\,bt]} f(t-y)\mathrm{d}U^*(y) &= \int_{[al^{-1}t,\,bl^{-1}t]} f_l(l^{-1}t-y)\mathrm{d}\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}\{l^{-1}S_n^*\leq y\}\\ &\sim \frac{l}{\mathbb{E}\xi^*}\int_{(1-b)l^{-1}t}^{(1-a)l^{-1}t} f_l(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\mathbb{E}\xi^*}\int_{(1-b)t}^{(1-a)t} f(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$\square$

В формулировке и доказательстве леммы 8.4, необходимой для доказательства теоремы 1.2, используются обозначения, введенные в разделе 5.

Лемма 8.4. *Пусть $X_t, t > 0$ и X – случайные элементы, принимающие значения в пространстве D, а m_t и m – случайные точечные процессы, принимающие значения из множества $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Слабая сходимость*

$$\big(X_t, m_t\big) \;\Rightarrow\; \big(X, m\big),\;\; t\to\infty, \tag{58}$$

в продакт топологии $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ имеет место тогда и только тогда, когда для каждой функции $f\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$

$$\big(X_t, m_t(f)\big) \;\Rightarrow\; \big(X, m(f)\big),\;\; t\to\infty, \tag{59}$$

в продакт топологии $D\times[0,\infty)$.

Доказательство. Предположим, что имеет место сходимость (58). Тогда для любой фиксированной функции $f\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$ отображение $T_f : D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])\to D\times[0,\infty)$, определяемое формулой $T_f(X,m) = \big(X, m(f)\big)$, является непрерывным в продакт топологии, и (59) следует из теоремы о непрерывном отображении.

Обратно, пусть (59) выполнено. Тогда $X_t\Rightarrow X$ в D, и $m_t(f)\xrightarrow{d} m(f)$ при $t\to\infty$. Следовательно, семейства $\big(X_t\big)_{t\geq 0}$ и $\big(m_t(f)\big)_{t\geq 0}$ плотны в D и $[0,\infty)$ соответственно. Значит, они относительно компактны по теореме Прохорова. Из леммы 3.20 [24] заключаем, что семейство $\big(m_t\big)$ плотно (и относительно компактно) в $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Очевидно, что тогда и декартово произведение $\big(X_t, m_s\big)_{t,s\geq 0}$ относительно компактно в $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Поэтому семейтсво $\big(X_t, m_t\big)_{t>0}$ плотно в $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Остается заметить, что частичные пределы набора $\big(X_t, m_t\big)_{t>0}$ совпадают по распределению, так как для каждой функции $f\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$ имеет место (59). $\square$

Список литературы

[1] Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. (1974). *Случайные размещения.* Москва: Наука.

[2] Мирахмедов Ш.А. (1989). Рандомизированные разделимые статистики в обобщенной схеме размещения по счетному множеству ячеек. *Дискрет. матем.*, **1**, 46–62.

[3] Мирахмедов Ш.А. (1990). Рандомизированные разделимые статистики в схеме независимого размещения частиц по ячейкам. *Дискрет. матем.*, **2**, 97–111.

[4] Михайлов В.Г. (1981). Центральная предельная теорема для схемы независимого размещения частиц по ячейкам. *Труды МИАН.* **157**, 138–152.

[5] Bauer H. (2001). *Measures and integration theory.* Berlin: Walter de Gruyter.

[6] Bingham N. H. (1971). Limit theorems for occupation times of Markov processes. *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **17**, 1–22.

[7] Bingham N. H., Goldie C. M., and Teugels J. L. (1989). *Regular variation.* Cambridge: Cambridge University Press.

[8] Çinlar E. (1975). *Introduction to stochastic processes.* New Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs.

[9] Durrett R. and Liggett T. M. (1983). Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* **64**, 275–301.

[10] Gnedin A. V. (2004). The Bernoulli sieve. *Bernoulli.* **10**, 79–96.

[11] Gnedin A., Hansen A. and Pitman J. (2007). Notes on the occupancy problem with infinitely many boxes: general asymptotics and power laws. *Probability Surveys.* **4**, 146–171.

[12] Gnedin A. and Iksanov A. (2012). Regenerative compositions in the case of slow variation: A renewal theory approach. *Electr. J. Probab.* **17**, article 77, 1–19.

[13] Gnedin A., Iksanov A. and Marynych A. (2010). Limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. *Theory of Stochastic Processes.* **16(32)**, 44–57.

[14] Gnedin A., Iksanov A. and Marynych A. (2010). The Bernoulli sieve: an overview. *Discr. Math. Theoret. Comput. Sci.* Proceedings Series, **AM**, 329–342.

[15] Gnedin A., Iksanov A., Negadajlov P., and Roesler, U. (2009). The Bernoulli sieve revisited. *Ann. Appl. Prob.* **19**, 1634–1655.

[16] Gnedin A., Iksanov A. and Roesler U. (2008). Small parts in the Bernoulli sieve. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Proceedings Series, Volume **AI**, 235–242.

[17] Hall P. and Heyde C. C. (1980). *Martingale limit theory and its applications.* New York: Academic Press.

[18] Iglehart D. (1973). Weak convergence of compound stochastic process, I. *Stoch. Proc. Appl.* **1**, 11–31.

[19] Iksanov A. (2012+). On the number of empty boxes in the Bernoulli sieve I. *Stochastics*, принята к публикации.

[20] Iksanov A. (2012). On the number of empty boxes in the Bernoulli sieve II. *Stoch. Proc. Appl.* **122**, 2701–2729.

[21] Iksanov A., Marynych A. and Meiners M. (2013+). Limit theorems for renewal shot noise processes with decreasing response functions. Препринт (доступен по адресу www.arXiv.org).

[22] KARLIN S. (1967). Central limit theorems for certain infinite urn schemes. *J. Math. Mech.* **17,** 373–401.

[23] MIKOSCH T. AND RESNICK S. (2006). Activity rates with very heavy tails. *Stoch. Proc. Appl.* **116**, 131–155.

[24] RESNICK S. (1987). *Extreme values, regular variation, and point processes.* New York: Springer-Verlag.

[25] RESNICK S. (2005). *Adventures in stochastic processes.* Boston: Birkhäuser, 4th printing.

[26] SGIBNEV M. S. (1981). Renewal theorem in the case of an infinite variance. *Siberian Math. J.* **22**, 787–796.