Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Маринич Олександр Віталійович

УДК 519.21

Випадкові рекурсивні послідовності

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Іксанов Олександр Маратович
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ - 2011

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ

$\square$ – кінець доведення

$\mathbb{R}$ – дійсна пряма $(-\infty, \infty)$

$\mathbb{R}^+$ – невід'ємна півпряма $[0, \infty)$

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$

в.в. – випадкова величина

ф.р. – функція розподілу

х.ф. – характеристична функція випадкової величини

м.н. – майже напевно

$\Rightarrow$ – слабка збіжність; $\stackrel{d}{=}$ – рівність розподілів

$f = O(g)$ означає $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$; $f \sim g$ означає $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$L(\cdot)$ – функції, що повільно змінюються на ∞

$1_A(x)$ – індикаторна функція, що дорівнює 1, якщо $x \in A$, та $= 0$, інакше

$x^+ := \max(x, 0)$

$x \wedge y = \min(x, y)$

$x \vee y = \max(x, y)$

const – константи, значення яких не важливі; два такі символи навіть в одному рядку можуть позначати різні константи

ВСТУП

Актуальність теми. *Лінійною випадковою рекурсивною послідовністю* називається послідовність випадкових величин $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ така, що її одновимірні розподіли задовольняють рівність

$$X_1 = 0, \qquad X_n \stackrel{d}{=} V_n + \sum_{r=1}^{K} A_r(n) X^{(r)}_{I^n_{(r)}}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

де X_n є деякою характеристикою структури розміру n, яка розбивається згідно з певним правилом на K підструктур випадкових розмірів $I^n_{(r)} \in \{1, \ldots, n\}$, V_n – це випадковий неоднорідний член, $A_r(n) > 0$ – ваговий множник r-ої підструктури, K – фіксоване натуральне число. Для кожного $r = 1, \ldots, K$ випадкова величина $X^{(r)}_k$, що відповідає r-ій підструктурі, вважається незалежною від $((I^n_{(1)}, \ldots, I^n_{(K)}, A_1(n), \ldots, A_K(n), V_n))_{n\geq 2}$ та розподіленою як X_k для кожного $k \in \mathbb{N}$. Також припускається, що послідовності $(X^{(1)}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (X^{(K)}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ незалежні в сукупності.

Лінійні випадкові рекурсії вигляду (1), часто у спрощеному вигляді з $K = 1$, з'являються у різних галузях прикладної та теоретичної ймовірності, зокрема при вивченні таких випадкових структур, як випадкові дерева, коалесценти, рекурсивні алгоритми, випадкові блукання з бар'єром, випадкові регенеративні структури та багато інших. Ці, на перший погляд, зовсім різні випадкові об'єкти поєднує їх внутрішня рекурсивна природа, яка формально може бути описана в термінах випадкових рекурсивних послідовностей вигляду (1), яким задовольняють параметри цих структур. Така внутрішня самоподібність дозволяє об'єднати ці об'єкти під спільною назвою *випадкові рекурсивні комбінаторні структури* та робить випадкові рекурсивні послідовності потужним засобом їх дослідження.

Широкий спектр прикладних та теоретичних задач, в яких виникають випадкові рекурсивні комбінаторні структури, сприяв появі величезної кількості публікацій, присвячених їх дослідженням, що свідчить про актуальність цієї проблематики. Важливі результати, що призвели до кращого розуміння рекурсивної природи таких випадкових об'єктів, були отримані в роботах О. Гнєдіна, М. Дрмоти, О. М. Іксанова, Р. Найнінгера, Л. Рушендорфа, У. Рьослера, Х. Хвана, Ф. Флажолє, В. Шпанковскі та інших.

В даній дисертаційній роботі встановлено деякі загальні результати для випадкових рекурсивних послідовностей, а також доведено граничні теореми для двох окремих випадкових рекурсивних структур, в яких вони виникають: граток Бернуллі та перестановних коалесцентів.

Гратка Бернуллі – це схема зайнятості з нескінченною кількістю урн (схема Карліна) з випадковими ймовірностями потраплення в кожну урну, що визначаються в термінах послідовності незалежних та однаково розподілених випадкових величин $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ця схема була запропонована О. Гнедіним як узагальнення декількох моделей прикладної ймовірності. Якщо випадкова величина W_1 має розподіл, вироджений у точці $x \in (0,1)$, то гратка Бернуллі еквівалентна схемі, що виникає у класичній процедурі вибору лідера. Остання схема (або еквівалентні їй моделі) вивчалася у роботах Т. Брюса, А. Кнопфмахера, Г. Лушара, Х. Махмуда, Х. Продінгера, Д. Філла, С. Янсона та інших. Якщо W_1 має бета $(1,\theta)$ розподіл для деякого $\theta > 0$, то існує тісний зв'язок між гратками Бернуллі та випадковими підстановками, які досліджувалися такими авторами, як Р. Арратіа, А. Барбур, П. Ердьош, В. Колчін, С. Таваре, П. Туран та іншими. У даній роботі встановлено граничні результати для деяких функціоналів, пов'язаних з гратками Бернуллі. В цих результатах розподіл W_1 не припускається відомим в явному вигляді.

З моменту своєї появи у роботах Д. Ф. К. Кінгмана перестановні коалесценти стали потужним засобом у дослідженнях, пов'язаних з генетикою популяцій, зокрема, у аналізі генеалогії послідовностей ДНК. В основі коалесцента лежить модель нейтральної еволюції, а сам коалесцент є апроксимацією класичної моделі Райта-Фішера у випадку, коли розмір популяції великий. Вагомий внесок у розвиток теорії перестановних коалесцентів зроблено у роботах Ж. Берестикі, Н. Берестикі, Ж. Бертуана, О. Гнедіна, О. М. Іксанова, М. Мьолє, Д. Пітмана, С. Сагітова, Д. Швайнсберга та інших. У даній роботі розв'язано декілька відкритих задач теорії перестановних коалесцентів, зокрема, доведено граничні результати для числа зіткнень у бета $(2, b)$-коалесцентах та встановлено асимптотику трьох функціоналів на коалесценті Пуассона-Діріхле.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у відповідності до плану наукових досліджень кафедри дослідження операцій факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в межах науково-дослідної теми "Розробка теорії і програмного забезпечення стохастичних моделей, теорії алгебраїчних систем та аналіз перспектив їх застосувань. Розробка та впровадження інформаційних технологій в освіті" (2006-2010 рр.), НДР №06 БП015-06, номер держреєстрації 0106U004352.

Підготовка дисертаційної роботи була частково підтримана грантом DFG (організація наукових досліджень Німеччини) № 436UKR 113/93/0-1, проект "Стохастичні нерухомі точки"(2007-2010 рр.). Частина цієї роботи виконувалась в рамках спільного з університетом міста Утрехт (Нідерланди) проекту "Combinatorial stochastic processes"(2008-2011 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є встановлення граничних результатів для випадкових рекурентних співвідношень, які виникають у дослідженнях, пов'язаних з гратками Бернуллі та у теорії коалесцентів з множинними зіткненнями, та знаходження асимптотичної поведінки моментів випадкових рекурентних співвідношень загального вигляду. Об'єктом дослідження є випадкові рекурентні співвідношення, пов'язані з гратками Бернуллі та з функціоналами, що діють на коалесцентах. Предметом дослідження є асимптотика моментів випадкових рекурентних співвідношень у загальному випадку, а також слабка збіжність функціоналів, що діють на гратках Бернуллі та функціоналів на коалесцентах з множинними зіткненнями.

Крім стандартного ймовірнісного апарату, у дисертаційній роботі використовуються методи

1) теорії відновлення та теорії випадкових блукань (Розділ 3);

2) теорії правильної зміни (Розділ 3);

3) теорії ітеративних функцій (Розділ 2);

4) теорії марківських процесів (Розділ 4).

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи є новими. Зокрема:

- запропоновано та обгрунтовано новий метод дослідження асимптотичної поведінки моментів випадкових рекурсивних послідовностей загального вигляду – метод "ітеративних функцій";
- встановлена достатня умова слабкої збіжності часу поглинання спадних ланцюгів Маркова до експоненційного функціоналу від субординатора з відомою мірою Леві;
- у повній загальності доведено результат про слабку збіжність числа зайнятих інтервалів у гратках Бернуллі;
- встановлено асимптотичну поведінку середнього числа порожніх інтервалів та числа малих частин у гратках Бернуллі;
- знайдено асимптотику моментів та доведено центральну граничну теорему для числа зіткнень у бета $(2, b)$-коалесцентах;
- досліджено асимптотичну поведінку моментів трьох функціоналів, що діють на коалесценті Пуассона-Діріхле.

Доведений у даній дисертації результат про слабку збіжність числа зайнятих інтервалів у гратці Бернуллі вказує п'ять режимів збіжності, що відрізняються нормуючими та центруючими константами та/або граничними законами. Він узагальнює результати, отримані у [49, 55] при додаткових моментних припущеннях.

Запропонований метод дослідження асимптотичної поведінки моментів випадкових рекурсивних послідовностей є новим і базується на техніці ітеративних функцій. Даний метод був розроблений для розв'язання однієї задачі у теорії коалесцентів з множинними зіткненнями, але пізніше був узагальнений на довільні рекурсії вигляду (1).

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Результати даної роботи, що носять в основному теоретичний характер, є внеском до теорії відновлення, теорії коалесцентів та теорії ігор. Результат про асимптотичну поведінку моментів випадкових рекурсій, який наведено в другому розділі, є загальним і може бути застосований до довільних лінійних рекурсій, що виникають у різних розділах математики. Результати пункту 3.3.1, пов'язані зі збуреними випадковими блуканнями, також представляють самостійний інтерес.

Практичне значення отриманих результатів полягає у потенціальній можливості їх застосування до розв'язання деяких задач, що виникають у математичній фізиці, теорії алгоритмів, страховій справі, математичній біології, економіці, математичній статистиці та інших галузях.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації отримані автором особисто. З статей, написаних у співавторстві, до дисертації включені лише результати автора.

В статті [71] О. М. Іксанову та М. Мьолє належить підготовка остаточної версії статті та остання версія доведення теореми 1.5, в статті [52] автору належать варіанти доведення основних результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на міжнародній конференції "Український математичний конгрес (Київ, 2009 р.), міжнародній конференції "9th German open conference in probability and statistics" (Лейпциг, Німеччина, 2010 р.), міжнародних конференціях "Problems of decision making under uncertainties" (Кам'янець-Подільський, 2009 р.; Львів, 2010 р.; Ялта, 2010 р.), міжнародній конференції з аналізу алгоритмів "AofA 2010"(Відень, Австрія, 2010 р.).

Також матеріали дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на наукових семінарах при відділі теорії ймовірностей Інституту математики університету міста Кіль (Німеччина), на наукових семінарах відділення математики університету міста Утрехт (Нідерланди), при відділі випадкових процесів Інституту математики НАН України, на науковому семінарі з теорії випадкових процесів при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ "КПІ", а також на наукових семінарах при кафедрі дослідження операцій та при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено у 4 статтях [2, 3, 52, 71], надрукованих у провідних наукових фахових виданнях України (які входять до переліку ВАК) та інших країн. Частина результатів міститься у статті [51], що вийшла у періодичному електронному іноземному виданні.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, 4-х розділів, висновків та списку використаних джерел. Кожен розділ розбито на підрозділи, які, в свою чергу, поділяються на пункти. Кожен розділ має власну нумерацію формул. Нумерація ж теорем, лем, зауважень тощо загальна для всієї роботи. Робота містить один малюнок та три таблиці.

Наведемо тепер скорочену вибірку основних результатів роботи.

Дослідження асимптотики моментів випадкових рекурсивних послідовностей методом ітеративних функцій. У другому розділі дисертації запропоновано новий метод дослідження асимптотичної поведінки моментів випадкових рекурсивних послідовностей. Він носить назву "метод ітеративних функцій" і застосовується, зокрема, при доведенні теорем 52 та 54 у четвертому розділі. Метод був запропонований у роботі [2].

Позначимо через $g^{\circ(k)}$ k-кратну композицію функції g з собою.

Означення 1. Нехай функція $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є строго зростаючою, необмеженою, неперервною на області визначення та задовольняє умову: для деякого $x_0 > 0$ та довільного $x_1 > x_0$ існує $\varepsilon_{x_1} > 0$ таке, що

$$x - g(x) > \varepsilon_{x_1} \ \ \text{для всіх} \ \ x \in (x_0, x_1). \tag{2}$$

Нехай функції $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ та $k : [0, x_0] \to \mathbb{R}$ є неперервними на області визначення. Визначимо функцію $g^* : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ рівністю

$$g^*(x) = \sum_{i=1}^{m_0(x)} h(g^{\circ(i-1)}(x)) + k(g^{\circ(m_0(x))}(x)),$$

де

$$m_0(x) := \inf\{k \geq 0 : g^{\circ(k)}(x) \leq x_0\}.$$

Функція g^* називається *ітеративною функцією, породженою четвіркою* (h, g, x_0, k), та позначається $g^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$.

Метод ітеративних функцій використовується для дослідження асимптотичної поведінки розв'язку рекурсії

$$a_1 = a, \ \ a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} a_k, \ \ n \geq 2, \tag{3}$$

де (c_{nk}), $n \geq 2$, $1 \leq k < n$ – заданий трикутний масив невід'ємних чисел, а (b_n) – задана послідовність невід'ємних чисел. Зауважимо, що моменти лінійних випадкових рекурентних співвідношень вигляду (1), задовольняють рекурентне співвідношення вигляду (3).

Наведемо алгоритм відшукання асимптотичної поведінки моментів випадкових рекурентних співвідношень.

Алгоритм методу ітеративних функцій

1. Виконати зведення до ймовірностей, використовуючи метод, описаний, наприклад, в [110]. Як результат, отримуємо рекурсію

$$A_1 = A, \ \ A_n = B_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} A_k, \ \ n \geq 2,$$

де $\sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} = 1$ для всіх $n \geq 2$ та $B_n \geq 0$. Нехай I_n – випадкова величина з розподілом $\mathbb{P}\{I_n = k\} = p_{nk}, \ \ n \geq 2, \ \ k < n$.

2. Довести розбіжність A_n, використовуючи, наприклад, твердження 14 чи інший метод.

3. Знайти неперервну, строго зростаючу, необмежену функцію $g(x)$, що визначена на $\mathbb{R}^+$, таку, що $g(n) = \mathbb{E}I_n + o(\mathbb{E}I_n)$. Вибрати x_0 так, щоб виконувалась умова (2). Знайти неперервну функцію $h(x)$, визначену на $\mathbb{R}^+$, таку, що $h(n) \sim B_n$.

4. Знайти ітеративну функцію g^*, породжену четвіркою (h, g, x_0, k), де k – довільна неперервна на $[0, x_0]$ функція (див. означення 1).

5. Якщо g^* є елементарною функцію, то перейти на наступний крок, інакше вибрати функцію k так, щоб g^* була двічі диференційовною (див. теорему 8) та перейти на наступний крок.

6. Якщо $f(\mathbb{E}I_n) - f(g(n)) = o(h(n))$, то перейти на наступний крок, інакше перейти на крок 3 та вибрати іншу функцію g з асимптотично меншим членом $o(\mathbb{E}I_n)$.

7. Якщо $\mathbb{E}f(I_n) - f(\mathbb{E}I_n) = o(h(n))$ то $A_n \sim f(n)$. Якщо $\mathbb{E}f(I_n) - f(\mathbb{E}I_n) \sim ch(n)$ то $A_n \sim (1-c)^{-1} f(n)$ (див. теорему 11).

У підрозділі 2.1 розділу 2 сформульовано та доведено теореми, що обгрунтовують наведений вище алгоритм, а також наведено ряд прикладів його застосування.

Окремим випадком співвідношення (1) є рекурсія

$$X_1 = 0, \ \ X_n \stackrel{d}{=} 1 + X'_{I_n}, \ \ n \geq 2, \tag{4}$$

де $I_n \in \{1, \dots, n-1\}$ – це довільний випадковий індекс, а випадкова величина X'_k вважається незалежною від I_n та розподіленою як X_k для кожного $k \in \mathbb{N}$. Випадкові рекурсії вигляду (4) природно інтерпретувати в термінах ланцюгів Маркова. Нехай $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ – це спадаючий ланцюг Маркова з множиною станів $\mathbb{N}$ та перехідними ймовірностями

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y_n = j | Y_{n-1} = i\} &= \pi_{i,j} > 0, \;\; 1 \le j < i, \;\; i \ge 2, \\ \mathbb{P}\{Y_n = j | Y_{n-1} = i\} &= 0, \;\; j \ge i, \;\; i \ge 2, \\ \mathbb{P}\{Y_n = 1 | Y_{n-1} = 1\} &= 1. \end{aligned}$$

Для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ визначимо випадкову величину

$$X_n := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : Y_k = 1 \text{ за умови } Y_0 = n\}, \tag{5}$$

що є часом поглинанная ланцюга, який стартує у стані $Y_0 = n$. Зафіксувавши розмір першого стрибка ланцюга та скориставшися марківською властивістю, отримаємо рівність розподілів (4), де $n - I_n$ є розміром першого стрибка. Отже, розподіл I_n задається так

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = \pi_{n,k}, \; 1 \le k < n, \;\; n \ge 2. \tag{6}$$

Підрозділ 2.2 розділу 2 присвячений дослідженню асимптотичної поведінки часу поглинання спадних ланцюгів Маркова, тобто рекурсіям вигляду (4). Наведемо основний результат підрозділу 2.2.

Теорема 19. Припустимо, що для всіх $x > 0$ існує границя

$$\Phi(x) := \lim_{n \to \infty} n(1 - \mathbb{E}(1 - I_n/n)^x). \tag{7}$$

Тоді при $n \to \infty$

$$X_n/n \xrightarrow{d} \int_0^\infty e^{-\sigma_t} dt, \tag{8}$$

де $(\sigma_t)_{t \ge 0}$ – субординатор з експонентою Лапласа $\Phi(x)$.

Гратка Бернуллі – це модель розміщення, що може бути реалізована так. Розглянемо випадкове розбиття відрізку $[0, 1]$ точками мультиплікативного випадкового блукання

$$Q_0 := 1, \;\; Q_n = \prod_{j=1}^{n} W_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкової величини $W \in (0,1)$, що називається кроком. Нехай $U_1, \ldots, U_n$ – вибірка розміру n з рівномірного на $[0,1]$ розподілу, яка не залежить від (Q_n), а $U_{n,1} \le \ldots \le U_{n,n}$ – відповідні порядкові статистики. Інтервал (Q_{i+1}, Q_i) називається *зайнятим*, якщо він містить принаймні одну точку рівномірної вибірки, та *порожнім* – у супротивному випадку.

Введемо позначення $\mu := \mathbb{E}|\ln W|$, $\sigma^2 := \mathbb{D}(\ln W)$ та $\nu := \mathbb{E}|\ln(1-W)|$, а також

- $M_n = \sup\{k \in \mathbb{N} : Q_k > U_{n,1}\}$ – номер останнього зайнятого інтервалу, якщо рахувати справа наліво;
- $L_n = \#\{0 \le k \le M_n - 1 : (Q_{k+1}, Q_k)$ не містить жодної рівномірної точки$\}$ – число порожніх інтервалів до останнього зайнятого;
- $K_n = \#\{k \in \mathbb{N}_0 : (Q_{k+1}, Q_k)$ містить принаймні одну рівномірну точку$\}$ – число зайнятих інтервалів;
- $K_{n,r} = \#\{k \in \mathbb{N}_0 : (Q_{k+1}, Q_k)$ містить r рівномірних точок$\}$ – кількість інтервалів, в яких містяться r рівномірних точок.

Згідно з рівностями розподілів

$$K_0 = 0, \quad K_n \overset{d}{=} K'_{Q_1^{(n)}} + 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$K_{n,r} := 0, \quad K_{n,r} \overset{d}{=} K'_{P_1^{(n)},r} + 1_{\{P_1^{(n)}=n-r\}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$L_0 := 0, \quad L_n \overset{d}{=} L'_{P_1^{(n)}} + 1_{\{P_1^{(n)}=n\}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

де випадкові величини L'_j та $K'_{j,r}$ припускаються незалежними від випадкової величини $P_1^{(n)}$, що є числом рівномірних точок, що не потрапили до першого інтервалу, та розподіленими так як L_j та $K_{j,r}$ для кожного $j \in \mathbb{N}$; а випадкова величина K'_j припускається незалежною від випадкової величини $Q_1^{(n)}$, що є числом рівномірних точок, що не потрапили до першого *зайнятого* інтервалу, та розподіленою так як K_j для кожного $j \in \mathbb{N}$, послідовності $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(K_{n,r})_{n\in\mathbb{N}_0}$ та $(L_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ є лінійними випадковими рекурсивними послідовностями. Розділ 3 даної роботи присвячений отриманню різних граничних теорем для них.

У подальшому припускається, що розподіл випадкової величини W не є зосередженим на множині $(x^j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ для жодного $x \in (0,1)$ або, що еквівалентно, розподіл випадкової величини $|\ln W|$ є неарифметичним.

В теоремі 23 досліджена слабка збіжність послідовності (K_n). Для формулювання цього результату введемо

$$\rho^*(x) := \inf\{k \in \mathbb{N} : W_1 \cdots W_k < e^{-x}\}, \quad x \geq 0,$$

та

$$N^*(x) \ := \ \#\{k \in \mathbb{N} : W_1 \cdots W_{k-1}(1 - W_k) \geq e^{-x}\}, \quad x > 0.$$

Теорема 23. Якщо існують функції $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ та $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такі що $(\rho^*(x) - g(x))/f(x)$ слабко збігається (при $x \to \infty$) до деякого власного невиродженого розподілу, то $(X_n - b_n)/a_n$ слабко збігається (при $n \to \infty$) до того самого розподілу, де замість X_n можна взяти також K_n або $N^*(\ln n)$. Константи визначаються так

$$b_n = \int_0^{\ln n} g(\ln n - y)\, \mathbb{P}\{|\ln(1 - W)| \in \mathrm{d}y\}, \quad a_n = f(\ln n).$$

Наступна теорема описує режими збіжності та дає явний вигляд центруючих та нормуючих констант.

Теорема 24. Умова теореми 23 виконується тоді і лише тоді, коли розподіл $|\ln W|$ належить області притягання стійкого закону або функція $\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}$ повільно змінюється на нескінченності. Існує п'ять режимів збіжності:

(a) Якщо $\sigma^2 < \infty$, то з

$$b_n = \mu^{-1}\left(\ln n - \int_0^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1 - W)| > x\}\mathrm{d}x\right) \tag{12}$$

та $a_n = (\mu^{-3}\sigma^2 \ln n)^{1/2}$, послідовність $(K_n - b_n)/a_n$ слабко збігається до стандартного нормального закону.

(б) Якщо $\sigma^2 = \infty$ та

$$\int_0^x y^2\, \mathbb{P}\{|\ln W| \in \mathrm{d}y\} \ \sim \ L(x), \quad x \to \infty,$$

для деякої функції L, що повільно змінюється на нескінченності, то з b_n, що задається формулою (12), та $a_n = \mu^{-3/2} c_{[\ln n]}$, де (c_n) – це довільна додатна послідовність така, що $\lim_{n\to\infty} nL(c_n)/c_n^2 = 1$, послідовність $(K_n - b_n)/a_n$ слабко збігається до стандартного нормального закону.

(в) Якщо

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \ \sim \ x^{-\alpha} L(x), \quad x \to \infty, \tag{13}$$

для деякої функції L, що повільно змінюється на нескінченності та $\alpha \in (1,2)$, то з b_n, що задається (12), та $a_n = \mu^{-(\alpha+1)/\alpha} c_{[\ln n]}$, де (c_n) – це довільна додатна послідовність, така що $\lim_{n\to\infty} nL(c_n)/c_n^{\alpha} = 1$, послідовність $(K_n - b_n)/a_n$ слабко збігається до α-стійкого закону з характеристичною функцією

$$t \mapsto \exp\{-|t|^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)(\cos(\pi\alpha/2) + i\sin(\pi\alpha/2)\,\mathrm{sgn}(t))\}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(г) Нехай (13) виконується з $\alpha = 1$ та $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – це довільна неспадаюча функція така, що $\lim\limits_{x\to\infty} x\mathbb{P}\{|\ln W| > r(x)\} = 1$. Покладемо

$$m(x) := \int_0^x \mathbb{P}\{|\ln W| > y\}\mathrm{d}y, \quad x > 0.$$

Тоді з

$$b_n := \int_0^{\ln n} \frac{\ln n - y}{m(r((\ln n - y)/m(\ln n - y)))}\, \mathbb{P}\left\{\Big|\ln(1-W)\Big| \in \mathrm{d}y\right\}$$

та

$$a_n := \frac{r(\ln n/m(\ln n))}{m(\ln n)},$$

послідовність $(K_n - b_n)/a_n$ слабко збігається до 1-стійкого закону з характеристичною функцією

$$t \mapsto \exp\{-|t|(\pi/2 - i\ln|t|\,\mathrm{sgn}(t))\}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(д) Нехай (13) виконується для $\alpha \in [0,1)$. Тоді з $b_n \equiv 0$ та $a_n := \ln^\alpha n / L(\ln n)$ послідовність K_n/a_n слабко збігається до розподілу Міттаг-Леффлера θ_α, що однозначно визначається моментами

$$\int_0^\infty x^k \, \theta_\alpha(\mathrm{d}x) \; = \; \frac{k!}{\Gamma^k(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Твердження 35 вказує асимптотику середнього числа порожніх інтервалів гратки Бернуллі.

Твердження 35. Послідовність $(\mathbb{E}L_n)$ має таку асимптотичну поведінку:

1. Якщо $\mu = \infty$ та $\nu = \infty$, то
$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}W^n}{\mathbb{E}(1-W)^n} \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}W^n}{\mathbb{E}(1-W)^n}.$$
Зокрема, якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}W^n}{\mathbb{E}(1-W)^n} = \gamma_0 \in [0,\infty]$, то $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n = \gamma_0$.

2. Якщо $\nu < \infty$ та $\mu \le \infty$, то
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n = \nu/\mu.$$

3. Якщо $\mu < \infty$ та $\nu = \infty$, то при $n \to \infty$
$$\mathbb{E}L_n \sim \frac{1}{\mu} \int_1^n \frac{\mathbb{E}e^{-y(1-W)}}{y} \mathrm{d}y.$$

Цікавим є окремий випадок $W \overset{d}{=} 1 - W$, для якого число порожніх інтервалів L_n має однаковий розподіл для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Твердження 36. Якщо $W \overset{d}{=} 1 - W$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ випадкова величина L_n має геометричний розподіл з параметром $1/2$.

Останній результат третього розділу встановлює асимптотику малих частин $K_{n,r}$ гратки Бернуллі у випадку нескінченного μ.

Твердження 40 (б). Якщо $\mu = \infty$, то для кожного $r \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}K_{n,r} = 0$. Отже, $\lim_{n\to\infty} K_{n,r} = 0$ за ймовірністю.

Теорія коалесцентів. Наведемо неформальні означення перестановних коалесцентів. Перестановний *коалесцент з множинними зіткненнями* $\Pi_n = (\Pi_n(t))_{t\geq 0}$ є марківським процесом, що набуває значень у множині розбиттів n натуральних чисел. В момент часу $t = 0$ процес стартує з n-блочного розбиття, а далі еволюціонує згідно з правилом: у кожний момент часу $t \geq 0$, якщо число блоків дорівнює m, то кожен піднабір з k блоків зливається в один блок з інтенсивністю

$$\lambda_{m,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(\mathrm{d}x), \qquad 2 \leq k \leq m,$$

де Λ позначає деяку скінченну міру, визначену на сегменті $[0,1]$.

Перестановний *коалесцент з одночасними множинними зіткненнями* $\Pi_n^* = (\Pi_n^*(t))_{t\geq 0}$ є марківським процесом з тим же самим простором станів та початковим розподілом. Еволюція у даному класі коалесцентів відбувається згідно з правилом: у кожний момент часу $t \geq 0$, якщо число блоків дорівнює m то вони зливаються у j блоків у кожному з яких міститься $k_1, \ldots, k_j$ початкових блоків відповідно ($m = k_1 + \ldots + k_j$) з інтенсивністю

$$\psi_j(k_1, \ldots, k_j) = \int_{\Delta^*} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_j \in \mathbb{N} \\ \text{всі різні}}} x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_j}^{k_j} \frac{\Xi(dx)}{(x,x)}, \tag{14}$$

де $\Delta^* := \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^\infty x_i = 1\}$, $(x,x) = \sum_{k=1}^\infty x_k^2$, а Ξ позначає деяку скінченну міру на Δ^*[1].

При дослідженні перестановних коалесцентів цікавими з точки зору застосувань є такі функціонали:

- X_n – число зіткнень коалесцента, доки не залишиться єдиний блок (для коалесцента з одночасними множинними зіткненнями одночасні зіткнення рахуються як одне);
- τ_n – час до поглинання (висота дерева коалесцента або *час повернення до найближчого спільного предка*);
- L_n – повна довжина дерева коалесцента (тобто сумарний час життя всіх блоків в коалесценті до часу поглинання).

[1]У більш загальному випадку міра Ξ зосереджена на множині $\Delta := \{x = (x_1, x_2, \ldots) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^\infty x_i \leq 1\}$, а формула для інтенсивностей набуває більш складного вигляду.

Дослідження цих функціоналів природно пов'язане з випадковими рекурсивними послідовностями, оскільки мають місце такі рівності розподілів:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \quad X_n \overset{d}{=} 1 + X'_{I_n}, \\ \tau_1 &= 0, \quad \tau_n \overset{d}{=} T_n + \tau'_{I_n}, \\ L_1 &= 0, \quad L_n \overset{d}{=} nT_n + L'_{I_n}, \end{aligned}$$

де випадкова величина I_n є числом блоків, що залишилися після першого зіткнення, а випадкова величина T_n є часом до першого зіткнення, при цьому випадкова величина X'_k (τ'_k, L'_k) припускається незалежною від I_n ((T_n, I_n)) та розподіленою так як X_k (τ_k, L_k) для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Перестановний коалесцент з множинними зіткненнями називається *бета (2,b) коалесцентом*, якщо відповідна міра Λ задається рівністю

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\mathrm{B}(2,b)} x(1-x)^{b-1} 1_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x,$$

де $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ є бета функцією. Підрозділ 4.1 четвертого розділу присвячений встановленню граничних результатів для числа зіткнень X_n таких коалесцентів. Вибір такого специфічного об'єкта дослідження пояснюється тим, що методи, що використовувалися для дослідження бета (a, b) коалесцентів з $a \neq 2$, виявилися неспроможними для аналізу бета $(2, b)$ коалесцентів.

Введемо позначення: для $\mathrm{Re}(z) > 1$ $\zeta(z, b) = \sum_{i=0}^{\infty}(i + b)^{-z}$ позначає дзета-функцію Гурвіца, а $\Psi(z) = (d/dz) \ln \Gamma(z)$ – логарифмічну похідну гамма-функції.

Наведемо основні результати підрозділу 4.1. Теорема 41 встановлює двочленні асимптотичні розклади моментів X_n.

Теорема 41. При $n \to \infty$ для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}X_n^k \;=\; \frac{1}{(2m_1)^k} \ln^{2k} n + \frac{2k((2k+1)m_2 + 6cm_1)}{3(2m_1)^{k+1}} \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n),$$

де $m_1 := m_1^{(b)} = \zeta(2, b)$, $m_2 := m_2^{(b)} = 2\zeta(3, b)$ та $c := -\Psi(b) - 1$. Зокрема, дисперсія X_n має асимптотичний розклад

$$\mathbb{D}X_n \;=\; \frac{m_2}{3m_1^3} \ln^3 n + O(\ln^2 n) \;=\; \frac{2\zeta(3,b)}{3\zeta^3(2,b)} \ln^3 n + O(\ln^2 n).$$

Теорема 44 доводить посилений закон великих чисел для X_n.

Теорема 44. При $n \to \infty$

$$X_n / \ln^2 n \to 1/(2m_1) \text{ майже напевно,}$$

де $m_1 = m_1^{(b)} = \zeta(2, b)$.

Нарешті центральна гранична теорема для X_n міститься у теоремі 45.

Теорема 45. При $n \to \infty$ послідовність

$$\frac{X_n - \frac{1}{2m_1}\ln^2 n}{\sqrt{\frac{m_2}{3m_1^3}\ln^3 n}},$$

де $m_1 = m_1^{(b)} = \zeta(2, b)$ та $m_2 = m_2^{(b)} = 2\zeta(3, b)$, слабко збігається до стандартного нормального закону.

Перестановний коалесцент з одночасними множинними зіткненнями називається *коалесцентом Пуассона-Діріхле*, якщо характеристична міра Ξ має щільність $x \mapsto (x, x)$ по відношенню до розподілу Пуассона-Діріхле Π_θ з параметром $\theta > 0$. У підрозділі 4.2 четвертого розділу встановлено асимптотику моментів числа зіткнень X_n та часу до поглинання τ_n (теорема 52), а також доведено слабку збіжність підхожим чином нормованої повної довжини дерева L_n (теорема 54) коалесцента Пуассона-Діріхле.

Теорема 52. При $n \to \infty$ для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\mathbb{E}Y_n^k}{(\ln_\theta^*(n))^k} \to 1,$$

де Y_n позначає або число зіткнень X_n, або час до поглинання τ_n коалесцента Пуассона-Діріхле, а функція $x \mapsto \ln_\theta^*(x)$ визначається функціональним рівнянням

$$\ln_\theta^*(x) = (1 + \ln_\theta^*(\theta \ln x))1_{(e^{2\theta \vee 1}, \infty)}(x).$$

Зауважимо, що функція $x \mapsto \ln_\theta^*(x)$ не спадає, є необмеженою та зростає повільніше за будь-яку ітерацію логарифма.

Теорема 54. При $n \to \infty$

$$\frac{L_n}{n} \xrightarrow{d} \eta,$$

де випадкова величина η має стандартний показниковий розподіл.

Користуючись нагодою, автор дисертації висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Маратовичу Іксанову – за постановку розглянутих в дисертації наукових проблем, постійну увагу, цінні поради та підтримку в роботі. Також автор висловлює подяку своїм колегам та вчителям з кафедри дослідження операцій факультету кібернетики, зокрема, доценту Данилу Павловичу Проскуріну за його рекомендацію щодо вступу на кафедру дослідження операцій, без якої ця робота навряд чи була б написана. Окрема подяка висловлюється професору Олександру Васильовичу Гнедіну за теплу гостинність та підтримку автора під час візитів до університету м. Утрехт (Нідерланди), а також за нашу плідну співпрацю, результати якої частково відображені в цій дисертації.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1. Огляд за розділом 2.

Асимптотичний аналіз детермінованих лінійних рекурсій. Метод ітеративних функцій, запропонований у розділі 2, може бути застосований для асимптотичного аналізу різноманітних лінійних рекурсій вигляду

$$a_1 = a, \quad a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k} a_k, \quad n \geq 2, \tag{1.1}$$

де $(c_{n,k})_{n\geq 2,\, 1\leq k<n}$ – заданий трикутний масив чисел, а $(b_n)_{n\geq 2}$ – задана послідовність дійсних чисел. Зауважимо, що для довільного фіксованого натурального k послідовність $(\mathbb{E}X_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ моментів послідовності (X_n), що задовольняє співвідношення (1), задовольняє рекурсію типу (1.1). У загальному випадку асимптотичний аналіз (1.1) є складною аналітичною задачею. Тим не менш, у літературі були розроблені більш-менш загальні методи дослідження рекурсій такого вигляду.

Серед існуючих підходів найбільш популярним є метод *сингулярного аналізу твірних функцій* [39, 46]. Метод дає точну інформацію про асимптотику розв'язку (1.1) у тих випадках, коли вдається отримати певне функціональне (інтегральне, диференціальне) співвідношення між твірними функціями послідовностей, що є складовими (1.1). На другому кроці методу отримане співвідношення аналізується методами комплексного аналізу.

Ідею *репертуарного методу*, запропонованого у [63], можна коротко описати так. Спочатку будується репертуар $(b_n^{(\alpha)})_{\alpha\in A}$, де A – це деяка скінченна множина, неоднорідних членів (1.1) шляхом вибору послідовностей $(a_n^{(\alpha)})$ таких, що сума у формулі (1.1) згортається. Після цього будується розв'язок a_n рекурсії (1.1) з неоднорідним членом b_n у вигляді лінійної комбінації $a_n^{(\alpha)}$, $\alpha \in A$.

Окрім вказаних методів, існують і деякі інші. Згадаємо тут метод, запропонований у [30] та розвинений у [110], що базується на гармонічному аналізі та теорії потенціалу.

Ітеративні функції та функція "лог-зірочка". Метод ітеративних функцій був розроблений для розв'язання задачі, запропонованої у 2008 р. Мартіном Мьолє, про число зіткнень X_n у коалесценті, керуюча міра якого є мірою Пуассона-Діріхле. У четвертому розділі ми наведемо розв'язок цієї задачі (теорема 52), довівши, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ моменти $\mathbb{E}X_n^k$ зростають як степені функції $x \mapsto \ln^* x$, що зростає повільніше за будь-яку ітерацію логарифма. Аналогічний результат доводиться також для моментів $\mathbb{E}\tau_n^k$ часу поглинання τ_n цього ж коалесцента.

Автору відомо лише декілька прикладних задач, у яких виникає функція $x \mapsto \ln^*(x)$:

(a) число різноманітних алелей у моделі мутацій Охти-Кімури [80];

(b) середня складність тріангуляції Делоне евклідового мінімального кісткового дерева [37];

(c) повне число часток в момент часу $t > 0$ у просторовому коалесценті Кінгмана на графі з обмеженими степенями вершин [9].

Слід зазначити, що ітеративні функції використовувалися у дослідженнях принципу "поділяй-та-володарюй" в аналізі алгоритмів у роботі [79]. У вказаній роботі розглядаються випадкові процеси $(T(x))_{x\in\mathbb{R}^+}$, чиї одновимірні розподіли задовольняють рівність

$$T(x) \stackrel{d}{=} a(x) + T'(t(x)), \ \ x \in \mathbb{R}^+,$$

де $a(\cdot)$ – невід'ємна (невипадкова) функція; $t(\cdot)$ – в.в., що приймає значення з відрізку $[0, \cdot]$ та не залежить від родини $(T'(x))_{x\in\mathbb{R}^+}$, що є незалежною копією $(T(x))_{x\in\mathbb{R}^+}$.

Асимптотичний аналіз випадкових рекурентних співвідношень. В окремих випадках метод сингулярного аналізу твірних функцій може бути застосований для аналізу випадкових рекурентних співвідношень (1) (див., наприклад, [41]). Ще один метод, що є більш ймовірнісним і що має досить широке застосування, носить назву "метод стискаючих відображень". Цей метод був запропонований У. Рьослером у роботі [108] для аналізу алгоритму швидкого сортування та у подальшому отримав розвиток у роботах [96, 106, 109, 110]. Огляд результатів, отриманих до 1998 року, наведено у [111]. Найбільш загальний результат стосовно методу стискаючих відображень у випадку *невиродженого граничного співвідношення* наводиться у [97]. Важливе узагальнення на випадкові рекурсії з *виродженим граничним співвідношенням* зроблено у [98]. Основний результат роботи [98] переформульовано у твердженні 47 даної дисертації.

Час поглинання в ланцюгах Маркова.

Існує декілька статей в яких, як такий, розглядається час поглинання в ланцюгах Маркова, що не зростають [65, 76, 112, 121]. З результатів цих статей випливає, що слабка асимптотична поведінка часу поглинання можу бути принципово різною. Наприклад у [121], за певних припущень про монотонність, доводиться, що час поглинання має таку ж асимптотичну поведінку, як і час проходження рівня деяким випадквоим блуканням зі скінченною дисперсією кроку (з чого випливає, що граничний розподіл нормальний). У роботі [65] (див. також підрозділ (2.2.) даної дисертації) наведено деякі достатні умови за яких час поглинання слабко збігається до розподілу експоненційного функціоналу від субординатора. Існують приклади в яких граничного розподілу не існує взагалі (див., наприклад, [76]).

За припущення, що розподіл величини першого стрибка ланцюга Маркова має вигляд

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = \frac{p_{n-k}}{p_1 + \ldots + p_{n-1}},\ k = 1, \ldots, n-1,\ n \geq 2,$$

для деякого ймовірнісного розподілу $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ з $p_1 > 0$; або

$$I_n = [n\eta] + 1, \tag{1.2}$$

для деякої в.в. $\eta \in (0, 1)$, такої, що розподіл $-\ln\eta$ неарифметичний, у [73] та [75], відповідно, було отримано повний спектр граничних законів для подібним чином нормалізованого та нормованого часу поглинання. У випадку коли η у (1.2) має рівномірний розподіл на $[0, 1]$, розподіл відповідного часу поглинання X_n з'являється у багатьох застосуваннях. Наприклад, X_n має той же розподіл, що й: (a) число максимальних рекордів у вибірці розміру $n + 1$ з неперервного розподілу, (b) число циклів у випадковій перестановці $n + 1$ об'єкту, (c) число зіткнень у бета$(3, 1)$-коалесценті, звуженому на множину $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, доки не залишиться єдиний блок. Інші приклади можна знайти у [15].

Підрозділ 2.1. та підрозділ 2.2. дисертації написані по статтям [2] та [3], відповідно.

1.2. Огляд за розділом 3.

Модель розбиття, яке породжуються процесом "ламання палиці" , називаються браткою Бернуллі. Вона була запропонована у роботі О. Гнєдіна [49] і є узагальненням як мінімум троьх моделей прикладної теорії ймовірностей.

Процедура обрання лідера. Якщо розподіл в.в. W вироджений у деякій тояці $p \in (0, 1)$, то гратка Беруллі зводиться до *процедури обрання лідера.* Нехай n осіб грають у таку гру. У першому раунді кожен з гравців підкидає монету з ймовірністю p випадання герба, ті з гравців у кого випала решітка вибувають, а ті у кого випав герб переходять у другий раунд. Цей процес повторюється поки не залишиться жодного гравця. Якщо в деякому раунді у всіх гравців випадає герб, то раунд оголошується нічийним та повторюється доти, доки хоча б один гравець не вийде з гри. Задача вибору лідера полягає у знаходженні ймовірності того, що лідер єдиний $\mathbb{P}\{Z_n = 1\}$. Інші функціонали, що представляють інтерес у процедурі обрання лідера: M_n – число раундів, доки лідер(-и) не буде(-уть) обраний(-і), K_n – число результативних (не нічийних) раундів, доки лідер(-и) не буде(-уть) обраний(-і), $L_n = M_n - K_n$ – число нічийних раундів. Ці характеристики вивчались багатьма авторами в різних (проте еквівалентних) контекстах: процедура обрання лідера [44, 45, 77, 85, 86, 87, 88, 91, 105], рекорди у геометричних вибірках [11, 18, 29, 31, 32, 61, 67] і т.д.

Цикли у випадкових перестановках. Якщо W має бета$(1,\theta)$ розподіл з деяким параметром $\theta > 0$, то гратки Бернуллі тісно пов'язані з циклами випадкових перестановок. Розглянемо випадковий вектор $C^{(n)} := (C_{n,1}, \ldots, C_{n,n})$, де $C_{n,j}$ – це число циклів довжини j у θ-зсуненій випадковій перестановці множини $\{1, \ldots, n\}$ (див. [12] для вичерпної інформації про випадкові перестановки та суміжні питання). Тоді

$$C^{(n)} \stackrel{d}{=} (K_{n,1}, \ldots, K_{n,n}),$$

де $K_{n,r}$ – це число інтервалів, які містять рівно r рівномірних точок з n в гратці Бернуллі. Розподіл випадкового вектора $C^{(n)}$ задається формулою:

$$\mathbb{P}\{C^{(n)} = (c_1, \ldots, c_n)\} = 1_{\{\sum_{j=1}^n jc_j = n\}} \frac{n!}{\theta^{(n)}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}, \quad c_j = 0, 1, \ldots, n,$$

яка відома під назвою *формула вибірок Юенса.* Інші класичні результати, пов'язані з циклами випадкових перестановок, включають в себе асимптотичну незалежність числа малих циклів, слабку збіжність числа циклів фіксованого розміру до пуассонівських випадкових величини та асимптотичну нормальність числа циклів.

Схеми зайнятості з нескінченною кількістю урн. Схема зайнятості, в якій n куль розміщуються по нескінченній кількості урн з фіксованими (*невипадковими*) ймовірностями p_k потрапляння в урну з номером $k = 1, 2, \ldots$, відома як *схема зайнятості Карліна.* Вперше такі моделі з'являються у роботах [13, 34], проте системтичне їх дослідження було розпочато у роботі С. Карліна [78]. Зокрема, у згаданій роботі доводиться центральна гранична теорема для числа зайнятих урн. Більш загальний результат було отримано пізніше у роботі [43]. Вичерпний огляд результатів по схемам зайнятості такого вигляду наведено у статті [50]. Гратка Бернуллі – це схема зайнятості Карліна з випадковими ймовірностями потрапляння в урну з номером $k = 1, 2, \ldots$, що задаються формулою

$$p_k := W_1 W_2 \cdots W_{k-1}(1 - W_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

де $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкової величини $W \in (0, 1)$.

Опубліковано декілька робіт в яких досліджувалась слабка збіжність числа зайнятих інтервалів K_n у гратці Бернуллі. За припущень $\mathbb{D}|\ln W| < \infty$ та $\mathbb{E}|\ln(1-W)| < \infty$ центральна гранична теорема для K_n була доведена у [49]. За єдиного припущення $\mathbb{E}|\ln(1 - W)| < \infty$ цей результат біло узагальнено у роботі [55], в якій отримано всю можливу множину граничних розподілів для K_n. На відміну від оригінального аналітичнного доведення Гнєдіна у [49], яке базується на ретельному аналізі випадкових рекурентних співвідношенн, підхід, використаний у [55], є більш ймовірнісними та використовує взаємозв'язок між K_n та $\rho^*(x)$ (див. (3.7)). Інший ймовірнісний підхід, що використовується у даній дисертації, базується на вивченні асимптотики малих частот. Цей підхід не новий та використовувався, наприклад, у [17, 58, 78], проте затсосування до граток Бернуллі – нове. Наголосимо, що взаємозв'язок між K_n та $N^*(x)$ (див. (3.3)) є більш фундаментальним ніж зв'язок між K_n та $\rho^*(x)$ у [55], оскільки величина $N^*(x)$ на відміну від $\rho^*(x)$ не чутлива до розташування урн в певному порядку.

Дослідженням малих частин $K_{n,r}$ також приділялась певна увага. Результати пов'язані з гратками Бернуллі можна знайти у [56], результати для загальних схем зайнятості наведені у статтях [17, 117] та посиланнях, які містяться в цих роботах.

Збурене випадкове блукання, визначення якого наведене у розділі (3.3.1.) даної роботи, виникає у різних областях теорії ймовірностей. Зокрема, вони тісно пов'язані з випадковими рядами спеціального типу (perpetuity), процесами дробового ефекту, системами массового обслуговування типу GI/G/∞ тощо. Збурені випадкові блукання вивчались у різних контекстах (див., наприклад, [1], [10], [64, Розділ 6], [99]), проте загальна теорія на даний момент ще не розроблена (у статті [7], робота над якою поки що не завершена, автори спробували, принаймні частково, це зробити). Як правило, в літературі питання про асимптотику збуреного випадкового блукання вирішувались шляхом накладання підхожих моментних обмежень, що дозволяло звести задачу до дослідження стандартних випадквоих блукань (див., наприклад, [64, Розділ 6], [68], [107, Теореми 2.1 та 2.2]). Автору не знайомі результати в дусі тих, які наведені у пункті 3.3.1.

Підрозділи 3.1-3.3 написані за статтею [52], підрозділ 3.4 базується на статті [51].

1.3. Огляд за розділом 4.

Теорія перестановних коалесцентів бере початок в математичній біології, а конкретніше, в генетиці популяцій. Основи цієї теорії були закладені у роботах Кінгмана [82, 83]. Базуючись на класичній моделі Райта-Фішера, Кінгман запропонував найпростішу модель коалесцента, який зараз носить назву *коалесцент Кінгмана.* У роботах [38, 70] було зроблено подальший розвиток теорії.

У 1999 році незалежно один від одного Пітман [102] та Сагітов [113] запропонували консепцію *коалесцентів з множинними зіткненнями*, які відомі також як *лямбда-коалесценти.* Зокрема, з їх результатів випливає, що коалесценти з множинними зіткненнями однозначно характеризуються деякою скінченно мірою Λ на $[0, 1]$, що пояснює їх назву.

В останні п'ять років було помічено спалах активності у дослідженнях лямбда-коалесцентів та, зокрема, їх властивостей для великих вибірок. Важливі результати в цій області було отримано у роботах [19, 20, 36, 39, 41, 48, 52, 60, 65, 71, 72, 73, 93, 116].

Одним з найбільш досліджених об'єктів в теорії коалесцентів, яким приділялась значена увага в останні роки, є бета(a, b)-коалесценти, тобто лямбда-коалесценти з характеристичною мірою Λ, що визначаєтся рівністю

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = cx^{a-1}(1-x)^{b-1}1_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x, \quad a,b,c > 0. \tag{1.3}$$

Цей клас покриває багато цікавих прикладів. Наприклад, якщо $a = 2 - b$, $a \in (0,1)$, то відповідний коалесцент тісно пов'язаний з b-стійким вітвленням [27]. Цей зв'язок, а також зв'язок бета$(a, 2-a)$-коалесцентів з іншими випадковмими процесами, пояснюється у роботах [21] та [103].

Випадок $a = b = 1$ відповідає відомому коалесценту Больтгаузена-Шнітмана, який був введений у роботі [28]. Цей процес пов'язаний з стійкими субординаторами [23] та генеалогією неперервних гіллястих процесів [22]. В останні роки він став об'єктом інтенсивних досліджень [39, 41, 62, 72, 102].

Нижче ми наводимо огляд відомих результатів по слабкій збіжності (при різних значеннях параметрів) трьох функціоналів на бета(a,b)-коалесценах: числа зіткнень X_n, часу поглинання τ_n та повної довжини дерева L_n.

Таблиця 1. Слабка збіжність $(X_n - a_n)/b_n$ для бета(a,b)-коалесцентаів.

a	b	a_n	b_n	Граничний розподіл	Джерело
$0 < a < 1$	$b > 0$	$n(\alpha - 1)$	$(\alpha-1)n^{1/\alpha}$	α-стійкий	[60]
$a = 1$	$b = 1$	(див. коментар)	$\frac{n}{(\ln n)^2}$	1-стійкий	[41, 72]
$1 < a < 2$	$b > 0$	0	κn^{α}	$\int_0^\infty e^{-\alpha S_t}\mathrm{d}t$	[53, 65]
$a = 2$	$b > 0$	$(2r_1)^{-1}(\ln n)^2$	$(3^{-1}r_1^{-3}r_2\ln^3 n)^{1/2}$	ст. нормальний	[53, 71]
$a > 2$	$b > 0$	$m_1^{-1}\ln n$	$(m_1^{-3}m_2\ln n)^{1/2}$	ст. нормальний	[53, 54]

Позначення: $\alpha = 2 - a$, $\kappa = \Gamma(\alpha)/\alpha$,

$$r_1 = \zeta(2,b), \quad r_2 = 2\zeta(3,b),$$

де $\zeta(\cdot,\cdot)$ – дзета-функція Гурвіца; якщо $a > 2$

$$m_1 = \Psi(a-2+b) - \Psi(b), \quad m_2 = \Psi'(b) - \Psi'(a-2+b),$$

де $\Psi(\cdot)$ – логарифмічна похідна від гамма-функції. Експонента Лапласа субординатора $(S_t)_{t\geq 0}$ задається формулою

$$\Phi(z) = \int_0^1 (1-(1-x)^z)x^{a-3}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x.$$

Комментарі: У Таблиці 1 єдиний відкритий пункт $a = 1$ та $b \neq 1$. У випадку $a = b = 1$ центрування задається так

$$a_n = n(\ln n)^{-1} + n \ln\ln n (\ln n)^{-2}. \tag{1.4}$$

Для коалесцента Кінгмана $X_n = n - 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

У подальшому випадок $a = 0$ відповідає коалеценту Кінгмана, а константа c у (1.3) рівна $1/B(a, b)$, де B є бета-функцією Ейлера.

Таблиця 2. Слабка збіжність $(\tau_n - c_n)/d_n$ для бета(a, b)-коалесценів.

a	b	c_n	d_n	Граничний розподіл	Джерело
$a = 0$		0	1	ρ	[82]
$a = 1$	$b = 1$	$\ln\ln n$	1	ст. Гумбеля	[48, 62]
$1 < a < 2$	$b > 0$	$\mathtt{m}^{-1} \ln n$	$(\mathtt{m}^{-3}\mathtt{s}^2 \ln n)^{1/2}$	ст. нормальний	[53]
$a = 2$	$b > 0$	$c_1^{-1} \ln n$	$(c_1^{-3} c_2 \ln n)^{1/2}$	ст. нормальний	[53]
$a > 2$	$b > 0$	$(\gamma m_1)^{-1} \ln n$	$\gamma^{-1}(m_1^{-3}(m_2 + m_1^2) \ln n)^{1/2}$	ст. нормальний	[54]

Позначення: Розподіл ρ є нескінченною згорткою показникових розподілів з параметрами $i(i-1)/2$, $i \geq 2$. Стандартна функція розподілу Гумбеля є $x \mapsto e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Константи визначаютсья так

$$\mathtt{m} = \frac{a+b-1}{(a-1)(2-a)}\Big(1 - (a+b-2)\big(\Psi(a+b-1) - \Psi(b)\big)\Big), \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{s}^2 \;&=\; \frac{a+b-1}{(a-1)(2-a)}\Big(2\big(\Psi(a+b-1) - \Psi(b)\big) \\ &-\; (a+b-2)\big((\Psi(a+b-1) - \Psi(b))^2 + \Psi'(b) - \Psi'(a+b-1)\big)\Big), \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$c_1 = b(b+1)\zeta(2, b), \quad c_2 = 2b(b+1)\zeta(3, b),$$

де ζ – дзета-функція Гурвіца. Константи m_1 та m_2 такі ж як у Таблиці 1, якщо $a > 2$

$$\gamma = \frac{a-1+b}{a-1}\frac{a-2+b}{a-2}.$$

Коментарі: У випадку $a \in (0, 1)$, $b > 0$ бета(a, b)-коалесцент *спускається з нескінченності* з чого випливає, що τ_n слабко збігається без нормалізації та центрування. Проте, граничий закон невідомий.

Випадок $a = 1$ та $b \neq 1$ повністю відкритий.

Таблиця 3. Слабка збіжність $(L_n - e_n)/f_n$ для бета(a, b)-коалесцентів.

a	b	e_n	f_n	Граничний розподіл	Джерело
$a = 0$		$2 \ln n$	2	ст. Гумбеля	[39, 120]
$a = 1$	$b = 1$	(див. коментар)	$\frac{n}{(\ln n)^2}$	1-стійкий	[39]
$a > 1$	$b > 0$	0	n	$\int_0^\infty e^{-S_t} \mathrm{d}t$	[93, 94]

Позначення: Експонента Лапласа субординатора $(S_t)_{t \geq 0}$ задається формулою

$$\Phi(z) = (1/B(a, b)) \int_0^1 (1 - (1 - x)^z) x^{a-3} (1 - x)^{b-1} \mathrm{d}x.$$

Комментарі: У випадку $a = b = 1$ центрування e_n співпадає з a_n у формулі (1.4). Як відомо автору, у випадку $0 < a < 1$ та $b = 2 - a$ встановлено лише закон великих чисел [19]. Автори [36] спробували встановити результати для випадку $a \in (0, 1)$ та $b > 0$, проте їх результат неповний. Підсумовуючи, ми робимо висновок, що випадки $a \in (0, 1)$, $b > 0$ та $a = 1$, $b \neq 1$ залишаються відкритими.

Результати по слабкій збіжності числа зіткнень у коалесценті Больтгаузена-Шнітмана вперше отримані у роботі [41] за допомогою сингулярного аналізу твірних функцій. Невдовзі після цього було знайдено альтернативне ймовірнісне доведення, яке опубліковано у [72]. Це доведення базується на техніці склеювання з *випадковим блуканням з бар'єром.* Такі процеси у подальшому досліджувались у [73] (див. також [4, 5, 74]), що дозволило встановити результати по слабкій збіжності числа зіткнень для бета$(a, 1)$-коалесцентів у випадку $a \in (0, 2)$.

Наголосимо, що деякі результати, наведені у таблицях, є окремими випадками більш загальних результатів, які можуть бути знайдені у роботах [53, 54, 60, 65, 93, 94].

Коалесценти з одночасними множинними зіткненнями були введені у [95]. Результати подальших досліджень можна знайти у статтях [47, 92, 94, 114, 115].

Підрозділи 4.1. та 4.2. написані по [71] та [2] відповідно.

Розділ 2

Моменти випадкових рекурсивних послідовностей

Цей розділ складається з двох незалежних підрозділів. В підрозділі 2.1. запропоновано новий метод дослідження асимптотики моментів лінійних випадкових рекурсивних послідовностей. Підрозділ 2.2. присвячено дослідженню слабкої збіжності часу поглинання певного класу ланцюгів Маркова, що спадають. Основна техніка, що використана у другому підрозділі – *метод моментів*.

2.1. Метод ітеративних функцій

Нехай $C^{(m)}(B)$ – це простір m-раз диференційовних на множині B функцій. Якщо $B = [a, \infty)$, то під похідною в точці a ми розуміємо праву похідну. Використовується таке позначення для суперпозиції функції з собою:

$$r^{\circ(0)}(x) \stackrel{def}{=} x, \;\; r^{\circ(k)}(x) \stackrel{def}{=} r(r^{\circ(k-1)}(x)), \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Також ми використовуємо стандартні позначення: $\lfloor x \rfloor = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ та $\lceil x \rceil = \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}$ для функцій "підлога" та "стеля", відповідно.

2.1.1. Означення та основні властивості. В цій главі вводиться означення *ітеративної функції* та наводяться деякі їх базові властивості.

Означення 1. Нехай $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є зростаючою необмеженою неперервною, та для деякого $x_0 > 0$ та довільного $x_1 > x_0$ існує $\varepsilon_{x_1} > 0$ таке, що

$$x - g(x) > \varepsilon_{x_1} \quad \text{для всіх} \quad x \in (x_0, x_1). \tag{2.1}$$

Припустимо, що функції $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ та $k : [0, x_0] \to \mathbb{R}$ є неперервними на області визначення та визначимо функцію $g^* : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таким чином

$$g^*(x) = \sum_{i=1}^{m_0(x)} h(g^{\circ(i-1)}(x)) + k(g^{\circ(m_0(x))}(x)), \tag{2.2}$$

де

$$m_0(x) := \inf\{k \geq 0 : g^{\circ(k)}(x) \leq x_0\}.$$

Функція g^* називається *ітеративною функцією породженою четвіркою* (h, g, x_0, k) та позначається $g^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$.

Зауважимо, що технічна умова (2.1) є достатньою для того, щоб величина $m_0(x)$ була скінченною для довільного $x \in \mathbb{R}^+$. Це випливає з оцінки $m_0(x) \leq \lfloor \frac{x - x_0}{\varepsilon_x} \rfloor + 1$, яка випливає з нерівності

$$x - k\varepsilon_x > g^{\circ(k)}(x), \quad x > x_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

яка доводиться по індукції.

Зауваження 2. З означення випливає, що g^* задовольняє функціональному рівнянню

$$g^*(x) \;=\; h(x) + g^*(g(x)),\ x > x_0, \tag{2.3}$$

з початковою умовою

$$g^*(x) \;=\; k(x), \qquad\qquad x \leq x_0.$$

Легко бачити, що остання рівність та формула (2.3) визначають функцію g^* однозначно.

Наведемо декілька прикладів ітеративних функцій.

Приклад 3. Нехай $h(x) \equiv 1$, $g(x) = \alpha x$, $\alpha \in [0,1)$, $x_0 = 1$, $k(x) \equiv 0$. Тоді $g^*(x) = 1 + g^*(\alpha x)$ при $x > 1$ та $g^*(x) = 0$ при $x \in [0,1]$. Розв'язком цього функціонального рівняння є

$$g^*(x) = \lceil \ln_{\frac{1}{\alpha}} x \rceil, \quad x > 1.$$

Перед формулюванням наступного прикладу нагадаємо визначення елементарної функції. Під елементарною фунцією ми розуміємо функцію, що побудована з "базових" функцій (константи $x \mapsto c \in \mathbb{R}$; степені $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; експоненти $x \mapsto a^x$, $a > 0$; логарифми $x \mapsto \ln_a x$, $a > 0, a \neq 1$; тригонометричні функції $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto \cot x$ та їх обернені) з використанням скінченної кількості елементарних операцій $(+, -, \times, \div)$ та суперпозицій.

Приклад 4. Нехай $f(\cdot)$ – довільна елементарна, неперервна на $[0, +\infty)$, необмежена функція, строго зростаюча на $[x_0, +\infty)$ для деякого $x_0 > 0$. З очевидної рівності

$$f(x) = 1 + f(f^{-1}((f(x) - 1)), x > f^{-1}(x_0 + 1)$$

випливає, що функція $f(\cdot)$ є ітеративною функцією породженою четвіркою $(1, f^{-1}((f(x) - 1), x_0, f(x))$.

Приклад 5. Нехай $h(x) \equiv 1$, $g(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $k(x) \equiv 0$. Тоді $g^*(x) = 1 + g^*(\ln x)$, $x > 1$, або $g^*(x) = \ln^* x$ – функція *"лог-зірочка"*, яка є, напевно, найвідомішою нетривіальною ітеративною функцією. Очевидною є рівність $\mathrm{Iter}(1, g, x_0, 0) = m_0(x)$, яка виконується, зокрема, для "лог-зірочка"-функції.

Якщо $h(x_0) \neq 0$, то ітеративна функція $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, 0)$ є кусково-неперервною. Нам зручніше працювати з гладкими ітеративними функціями, що і стало причиною введення функції k в означенні 1. Виявляється, що функції $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, 0)$ та $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$ мають однакову асимптотичну поведінку, а тому ми маємо змогу обирати функцію k, так щоб $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$

була достатньо гладкою. Нижче ми формалізуємо це твердження та опишемо як будувати функцію k.

Введемо відношення еквівалентності $\approx$ на множині ітеративних функцій за правилом

$$g_1^* \approx g_2^* \Longleftrightarrow g_1^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k_1), \quad g_2^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k_2).$$

Це відношення породжує розбиття множини ітеративних функцій на класи еквівалентності.

Означення 6. Клас еквівалентності

$$\mathcal{F} := \{F = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k), k \in C[0, x_0]\}$$

називається *ітеративною функцією породженою трійкою* (h, g, x_0). Якщо це не викликатиме неоднозначності, ми називатимемо *ітеративною функцією породженою трійкою* (h, g, x_0) довільний елемент класу.

Оскільки $|g_1^*(x) - g_2^*(x)|$ є обмеженою величиною на $\mathbb{R}^+$ для довільних функцій $g_1^*, g_2^* \in \mathcal{F}$, то всі функції з одного класу еквівалентності є асимптотично еквівалентними (якщо вони розбігаються до $+\infty$).

Означення 7. *m-раз диференційовною модифікацією* ітеративної функції g^* називається довільна ітеративна функція $\hat{g}^*$ така, що $\hat{g}^* \approx g^*$ та $\hat{g}^* \in C^{(m)}[x_0, +\infty)$.

У першому результаті, який є безпосереднім наслідком леми 16 та леми 17, що сформульовані нижче, доводиться що для гладких функцій g та h знайдеться така функція k, що функція $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$ теж буде гладкою. Для набору функцій $f_1, \ldots, f_n$ позначимо $W(f_1, \ldots, f_n)$ їх визначник Вронського.

Теорема 8. *Нехай $g, h \in C^{(m)}[x_0, +\infty)$ та*

$$W\Big(x^i - g^i(x), i = 1, \ldots, m+1\Big)(x_0) \neq 0.$$

Тоді існує функція k вигляду

$$k(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i,$$

така, що ітеративна функція породжена четвіркою (h, g, x_0, k) *є* m*-раз диференційовною на* $[x_0, +\infty)$.

Зауваження 9. Вектор коефіцієнтів $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1})$ є розв'язком системи лінійних рівнянь (див. лему 17) та може бути обчислений явно.

Наведемо приклад згладжування ітеративної функції "лог-зірочка".

Приклад 10. Нагадаємо, що функція "лог-зірочка" є ітеративною, що породжена четвіркою $(1, \ln x, 1, 0)$. Двічі диференційовна модифікація F функції "лог-зірочка" може бути побудована таким чином. Згідно з лемою 17, відповідна функція k приймає вигляд $k(x) = -\frac{2}{13}x^3 + \frac{3}{13}x^2 + \frac{12}{13}x$. Отже

$$F(x) = \begin{cases} 1 + F(\ln x), & x > 1, \\ -\frac{2}{13}x^3 + \frac{3}{13}x^2 + \frac{12}{13}x, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

На наведеному нижче малюнку представлені графіки функцій $\ln^* x$ та $F(x)$ при $x > 0$.

2.1.2. Асимптотична поведінка рекурсії (1.1)**.** Першим кроком асимптотичного аналізу виадкових рекурсій (1) є знаходження асимптотики моментів $\mathbb{E}X_n^k$ та центральних моментів $\mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}X_n)^k$ при фіксованому k та $n \to \infty$. Ця задача зводиться до дослідження асимптотичної поведінки розв'язку рекурсії вигляду (1.1).

В подальшому, якщо не стверджується протилежне, ми вважаємо, що $b_n \geq 0$, а тому й $a_n \geq 0$. З доведень, наведених нижче теорем, випливає, що ми могли б припускати лише, що b_n є знакосталою для досить великих n. За цього припущення, формулювання результатів виглядали б ускладненими, тому ми вирішили дотримуватись меншої загальності при більшій зрозумілості.

При дослідженні рекурсії (1.1), не зменшуючи загальності, можна вважати, що для довільного $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} = 1 \text{ та } c_{nk} \geq 0,\ k = 1, \ldots, n-1 \tag{2.4}$$

(див., наприклад, стр. 9 у [110]). В подальшому ми називатимемо, рекурсію (1.1), яка задовольняє (2.4) *рекурсією з вагами зведеними до ймовір-*

ностей. Якщо (2.4) виконується, позначимо через I_n випадкову величину з розподілом

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = c_{nk}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Теорема 11. *Припустимо, що послідовність* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє рекурсію* (1.1) *з вагами зведеними до ймовірностей. Нехай* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– неперервна, зростаюча та необмежена функція, така що*

$$g(n) = \mathbb{E}I_n + o(\mathbb{E}I_n), \quad n \to \infty^1,$$

та $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– неперервна функція, така що*

$$h(n) \sim b_n, \quad n \geq 2.$$

Якщо

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
- $g^*(\mathbb{E}I_n) - g^*(g(n)) = o(h(n))$, $n \to \infty$,

де g^* *– це ітеративна функція породжена трійкою* (h, g, x_0)*, то мають місце такі імплікації*

$$\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) = o(h(n)), \quad n \to \infty \Longrightarrow \tag{2.5}$$
$$a_n \sim g^*(n), \quad n \to \infty,$$

$$\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) \sim dh(n), \quad n \to \infty, \quad \text{для деякого } d < 1 \Longrightarrow \tag{2.6}$$
$$a_n \sim (1-d)^{-1} g^*(n), \quad n \to \infty.$$

Доведення. Покладемо $a'_n := a_n - g^*(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Послідовність $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє рекурентному співвдношенню

$$a'_1 = -g^*(1), \;\; a'_n = b_n - g^*(n) + \mathbb{E}g^*(I_n) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} a'_k, \quad n \geq 2. \tag{2.7}$$

Якщо $\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) = o(h(n))$ та $g^*(\mathbb{E}I_n) - g^*(g(n)) = o(h(n))$, то неоднорідний член (2.7) є $o(h(n))$ при $n \to \infty$. Застосовуючи частину (II) теореми 13, отримуємо $a'_n = o(a_n)$, а тому $a_n \sim g^*(n)$.

[1] Оскільки $I_n \leq n-1$, то завжди можливо обрати g таку що (2.1) виконується.

Якщо $\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) \sim dh(n)$ для деякого $d \in (0,1)$ та $g^*(\mathbb{E}I_n) - g^*(g(n)) = o(h(n))$, тоді неоднорідний член (2.7) асимптотично еквівалентний $dh(n)$. Застосовуючи частину (I) теореми 13, маємо $a'_n \sim da_n$, звідки випливає, що $a_n \sim (1-d)^{-1}g^*(n)$.

Якщо $\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) \sim dh(n)$ для деякого $d < 0$, то, застосовуючи частину (II) Теореми 13 до послідовностей $(g^*(n) - a_n)$ та (a_n), отримуємо $g^*(n) - a_n \sim -da_n$. Це співвідношення еквівалентне $a_n \sim (1-d)^{-1}g^*(n)$. $\square$

Теорема 12. *Припустимо, що* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє рекурсію* (1.1) *зведену до ймовірностей. Нехай* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *є двічі диференційовною, зростаючою та необмеженою функцією, такою що*

$$g(n) = \mathbb{E}I_n + o(\mathbb{E}I_n), \quad n \to \infty,$$

та $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *є двічі диференційовною функцією, такою що*

$$h(n) \sim b_n, \quad n \geq 2.$$

Якщо виконуються умови

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(C2) Існує неперервна функція k*, така що ітеративна функція* F *породжена четвіркою* (h, g, x_0, k) *є двічі диференційовною,*

(C3) $F(\mathbb{E}I_n) - F(g(n)) = o(h(n))$*,* $n \to \infty$*,*

(C4) існує $M > 0$ *таке, що для всіх* $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{D}\, I_n \leq M\mathbb{E}I_n$*,*

(C5) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq \mathbb{E}I_n/2} |F''(x)| \dfrac{\mathbb{D}\, I_n}{h(n)} = 0$*,*

(C6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sup_{1\leq x\leq n} |F(x)|}{h(n)\mathbb{D}\, I_n} = 0$*,*

(C7) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F'(\mathbb{E}I_n)}{h(n)} = 0$*,*

то

$$a_n \sim F(n), \; n \to \infty.$$

Доведення. З виконання умов (C1) та (C3) та імплікації (2.5) теореми 11 випливає, що достатньо показати

$$\alpha_n := \mathbb{E}F(I_n) - F(\mathbb{E}I_n) = o(h(n)).$$

Поклавши $\kappa := \frac{1}{2M}$ та $A_n := \{|I_n - \mathbb{E}I_n| > \kappa \mathbb{D}\, I_n\}$, отримуємо

$$|\alpha_n| \leq |\mathbb{E}(F(I_n) - F(\mathbb{E}I_n))1_{A_n}| + |\mathbb{E}(F(I_n) - F(\mathbb{E}I_n))1_{A_n^c}| =: \beta_n + \gamma_n.$$

Використовуючи нерівність Чебишева маємо

$$\beta_n \leq 2 \sup_{1 \leq x \leq n} |F(x)| \mathbb{P}(A_n) \leq \frac{2\mathbb{D}\, I_n \sup_{1 \leq x \leq n} |F(x)|}{(\kappa \mathbb{D}\, I_n)^2},$$

що є $o(h(n))$ за умовою (C6).

Двочленний розклад Тейлора в околі точки $\mathbb{E}I_n$ дає

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \left| \mathbb{E}\Big(F'(\mathbb{E}I_n)(I_n - \mathbb{E}I_n) + \frac{1}{2} F''(\theta_n)(I_n - \mathbb{E}I_n)^2 \Big) 1_{A_n^c} \right| \\ &\leq \left| F'(\mathbb{E}I_n)\mathbb{E}(I_n - \mathbb{E}I_n)1_{A_n} \right| + \frac{1}{2}\left| \mathbb{E}F''(\theta_n)(I_n - \mathbb{E}I_n)^2 1_{A_n^c} \right| = \gamma_{1,n} + \gamma_{2,n}, \end{aligned}$$

де $\theta_n \in [\mathbb{E}I_n - \kappa\mathbb{D}\, I_n, \mathbb{E}I_n + \kappa \mathbb{D}\, I_n]$. Застосуємо нерівності Коші-Буняковського та Чебишева і отримаємо

$$\begin{aligned} \gamma_{1,n} &= |F'(\mathbb{E}I_n)\mathbb{E}(I_n - \mathbb{E}I_n)1_{A_n}| \leq |F'(\mathbb{E}I_n)| \sqrt{\mathbb{E}(I_n - \mathbb{E}I_n)^2} \sqrt{\mathbb{P}(A_n)} \\ &\leq |F'(\mathbb{E}I_n)| \sqrt{\mathbb{D}\, I_n} \sqrt{\frac{\mathbb{D}\, I_n}{(\kappa \mathbb{D}\, I_n)^2}} = \frac{1}{\kappa} |F'(\mathbb{E}I_n)|, \end{aligned}$$

що є $o(h(n))$ за умовою (C7).

Умова (C4) дає оцінку

$$S_4 \leq \frac{1}{2} \sup_{x \geq \mathbb{E}I_n/2} |F''(x)| \mathbb{D}\, I_n,$$

що є $o(h(n))$ за умовою (C5). □

Наведені вище теореми 11 та 12 обгрунтовують Алгоритм знаходження асимптотики моментів лінійних виадкових рекурсій, наведений у вступі.

2.1.3. Застосування.

Число зіткнень у бета$(a,1)$-коалесценах. Нехай X_n – це число зіткнень у бета$(a,1)$-коалесценті, звуженому на множину $\{1,\dots,n\}$, де $a>0$. Відомо багато результатів по асимптотичній поведінці $\mathbb{E}X_n^k$, $k\in\mathbb{N}$, їх можна знайти, наприклад, у роботах [36, 40, 41, 60, 71, 90, 100, 101]. Нижче ми покажемо, як їх можна отримати, використовуючи запропонований метод ітеративних функцій.

Відомо, що послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє рекурентне співвідношення (4) з індексом I_n, який має розподіл

$$\mathbb{P}\{I_n=n-k\}=\frac{\frac{(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2)}}{1-\frac{\Gamma(a+n-1)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}},\quad k=1,\dots,n-1,\quad n\ge 2,$$

при $a\neq 2$, та

$$\mathbb{P}\{I_n=n-k\}=\frac{1}{(h_n-1)(k+1)},\quad k=1,\dots,n-1,\quad n\ge 2,$$

де $h_n=\sum_{k=1}^n k^{-1}$ при $a=2$.

З цих формул випливає розбіжність I_n до ∞ за ймовірністю з чого випливає, згідно з твердженням 14, що $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_n=+\infty$. Очевидно також, що відповідні рекурсії не потребують зведення ваг до ймовірностей.

Випадок $0<a<1$ [36, 60, 73]. Оскільки

$$\mathbb{E}I_n=n-(1-a)^{-1}+o(1),$$

можемо обрати

$$g(x)=x-\frac{1}{1-a}\quad\text{та}\quad h(x)=1.$$

Функціональне рівняння (2.3) має елементарний розв'язок $g^*(x)=(1-a)x$. Згідно з теоремою 11, $\mathbb{E}X_n\sim g^*(n)\sim(1-a)n$, $n\to\infty$.

Випадок $a=1$ (коалесцент Больтгаузена-Шнітмана) [40, 73, 90, 100, 101]. Оскільки

$$\mathbb{E}I_n=n-\ln n+O(1),\quad \mathbb{D}\,I_n=O(n)$$

можна обрати

$$g(x)=x-\ln x\quad\text{та}\quad h(x)=1.$$

З співвідношення

$$\frac{x}{\ln x} = 1 + o(1) + \frac{x - \ln x}{\ln(x - \ln x)}, \quad x \to \infty,$$

випливає, що $x \mapsto x/\ln x$ є ітеративою функцією породженою четвіркою $(1 + o(1), x - \ln x, 2, x/\ln x)$. З теореми 11 при $F(x) = x/\ln x$ випливає[2] $\mathbb{E}X_n \sim \frac{n}{\ln n}$, $n \to \infty$.

Випадок $a = 2$ (Теорема 41). З формули для $\mathbb{P}\{I_n = k\}$ при $a = 2$ та відомого асимптотичного розкладу $h_n = \ln n + \mathrm{const} + O(1/n)$, $n \to \infty$, випливає

$$\mathbb{E}I_n = \frac{1}{h_n - 1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k+1} = n - \frac{n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right).$$

Отже, можемо обрати

$$g(x) = \left(x - \frac{x}{\ln x}\right) 1_{(e,\infty)}(x) \quad \text{та} \quad h(x) = 1.$$

З співвідношення

$$\ln^2 x = 2 + o(1) + \ln^2(x - \frac{x}{\ln x}), \quad x \to \infty,$$

випливає, що $x \mapsto 2^{-1} \ln^2 x$ є ітеративною функцією породженою четвіркою $(1 + o(1), x - \frac{x}{\ln x}, e, 2^{-1} \ln^2 x)$. Застосовуючи теорему про середнє до функції $x \mapsto \ln^2 x$ ми отримуємо

$$\ln^2 \mathbb{E}I_n - \ln^2 g(n) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

та

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\mathbb{E} \ln^2 I_n - \ln^2 \mathbb{E}I_n\right) = 1 - \frac{\pi^2}{6},$$

що, з огляду на імплікацію (2.6), дає $\mathbb{E}X_n \sim \frac{3}{\pi^2} \ln^2 n$, $n \to \infty$.

Приклади з аналізу алгоритмів. Результати цього підрозділу взяті з [98],[89] та [108], відповідно. Ми наведемо нові доведення цих результатів.

---

[2]Єдине, що потребує доведення – це пункт (C3). В даній ситуації $\mathbb{E}I_n - g(n) = O(1)$, тому похідна функції $F(x) = x/\ln x$ прямує до нуля при $x \to \infty$. Отже, умова $C3$ випливає з теореми Лагранжа про середнє.

Алгоритм "Швидкого вибору". Нехай X_n – це число порівнянь у алгоритмі "Швидкого вибору" , які необхідні для знаходження мінімуму $\min(x_1, \ldots, x_n)$ вибірки $x_1, \ldots, x_n$. Тоді

$$X_1 = 0, \quad X_n \stackrel{d}{=} n - 1 + X'_{I_n}, \quad n \geq 2,$$

де $I_n = J_n \vee 1$, та J_n має рівномірний на $\{0, \ldots, n-1\}$ розподіл. Оскільки

$$\mathbb{E}I_n = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n},$$

то можемо обрати

$$g(x) = \frac{x+1}{2} \text{ та } h(x) = x - 1.$$

Функціональне співвідношення (2.3) має елементарний розвязок $g^*(x) = 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$. За теоремою 11, $\mathbb{E}X_n \sim g^*(n) \sim 2n$.

Глибина випадкового вузла у випадковому бінарному дереві пошуку. Відповідна рекурсія має вигляд

$$X_0 = -1, \; X_1 = 0, \quad X_n \stackrel{d}{=} 1 + X_{I_n}, \quad n \geq 2,$$

де $\mathbb{P}\{I_n = k\} = 2k/n^2$ для $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ та $\mathbb{P}\{I_n = 0\} = 1/n$. Оскільки

$$\mathbb{E}I_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{3n},$$

то можна обрати

$$g(x) = 2x/3 \text{ та } h(x) = 1.$$

Згідно з Прикладом 3, відповідна ітеративна функція рівна

$$g^*(x) = \lceil \ln_{\frac{3}{2}} x \rceil, \quad x > 1.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}\ln^+ I_n - \ln n) = -1/2$, то $\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}f(I_n) - f(\mathbb{E}I_n)) = 1 - \frac{1}{2\ln(3/2)}$, де

$$f(x) = \frac{\ln^+ x}{\ln(3/2)}.$$

Тому $f(x) \sim g^*(x)$, а отже, згідно з Алгоритмом наведеним у Вступі, $\mathbb{E}X_n \sim 2\ln(3/2) f(n) = 2\ln n$.

Алгоритм "Швидкого сортування". Нехай X_n – це число порівнянь, необхідних для сортування масиву довжини n алгоритмом "Швидкого сортування". Тоді $X_0 = X_1 = 0$, та

$$X_n \stackrel{d}{=} n - 1 + X'_{I_n - 1} + X''_{n - I_n}, \quad n \geq 2,$$

де $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ – незалежна копія $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що не залежить від випадкової величини I_n, що має рівномірний розподіл на $\{1, \ldots, n\}$. Покладемо $a_n := \mathbb{E}X_n$, тоді $a_0 = a_1 = 0$ та

$$a_n = n - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} a_k, \quad n \geq 2.$$

Рекурсія з вагами, зведеними до ймовірностей, отримується заміною $a'_n := a_n/(n+1)$, після чого маємо рівність

$$a'_n = \frac{n-1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(k+1)}{n(n+1)} a'_k, \quad n \geq 2.$$

Використовуючи таку ж аргументацію, як у попередньому прикладі маємо $a'_n \sim 2 \ln n$. Отже, $\mathbb{E}X_n \sim 2n \ln n$, $n \to \infty$, як добре відомо[3].

2.1.4. Допоміжні результати.

Властивості рекурсії (1.1).

Теорема 13. *Припустимо, що* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *та* $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняють рекурсіям з вагами зведеними до ймовірностей*

$$a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a_k, n \geq N, \tag{2.8}$$

та

$$a'_n = b'_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a'_k, n \geq N, \tag{2.9}$$

відповідно. Припустимо, що $b_n \geq 0$ *для* $n \geq N$ *та* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Тоді*

I. з $b'_n \sim b_n$, $n \to \infty$ *випливає* $a'_n \sim a_n$, $n \to \infty$, *та*

[3] Першим результатом по складності (нерандомізованого) алгоритму "Швидкого сортуванняЗ асимптотикою $O(n \ln n)$ наведений у роботі Хоара [69]. Докладний аналіз цього алгоритму можна знайти в огляді [118].

II. з $b'_n = o(b_n)$, $n \to \infty$ *випливає* $a'_n = o(a_n)$, $n \to \infty$.

Доведення пункту (I). Ми застосуємо ідею доведення твердження 3 у роботі [49]. Припустимо, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $a_n > (1+\varepsilon_0)a'_n$ для нескінченно багатьох n. Оскільки $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то ми можемо обрати $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ таке, що для довільного $c > 0$ нерівність $a_n > (1+\varepsilon)a'_n + c$ виконується для нескінченно багатьох n. Нехай n_c – це мінімальне таке n. Оскільки $\lim\limits_{c\to\infty} n_c = +\infty$, не зменшуючи загальності, вважаємо, що $n_c > N$. Для $n \le n_c - 1$ маємо $a_n \le (1+\varepsilon)a'_n + c$, звідки випливає

$$(1+\varepsilon)a'_{n_c} + c < a_{n_c} = b_{n_c} + \sum_{k=1}^{n_c-1} p_{n_c k} a_k \le b_{n_c} + c + (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n_c-1} p_{n_c k} a'_k.$$

Спрощуючи останній вираз маємо $1+\varepsilon < b_{n_c}/b'_{n_c}$. Спрямовуючи $c \to \infty$, маємо $\varepsilon < 0$, що суперечить припущенню. Отже, ми довели

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} \le 1.$$

Симетричні міркування доводять протилежну нерівність для нижньої границі.

Доведення пункту(II) випливає із застосування вже доведеної частини (I) до послідовностей $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(a_n - a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та того факту, що з відношення $b_n \sim b_n - b'_n$ випливає $a_n \sim a_n - a'_n$. □

Проста достатня умова для того щоб $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ наведена нижче.

Твердження 14. *Припустимо, що послідовність* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє* (1.1) *з вагами зведеними до ймовірностей. Якщо* $I_n \xrightarrow{P} \infty$ *та* $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = b \in (0, \infty]$, *то* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Доведення. З рекурсії (1.1) отримуємо

$$\begin{aligned} a_n &= b_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k} a_k = b_n + \sum_{k=1}^{M-1} p_{n,k} a_k + \sum_{k=M}^{n-1} p_{n,k} a_k \\ &\ge b_n + \Big(\inf_{1\le k<M} a_k\Big) \sum_{k=1}^{M-1} p_{n,k} + \Big(\inf_{M\le k\le n-1} a_k\Big) \sum_{k=M}^{n-1} p_{n,k}. \end{aligned}$$

Спрямувавши $n \to \infty$, отримаємо $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \ge b + \inf\limits_{k\ge M} a_k$. Спрямовуючи $M \to \infty$, маємо $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \ge b + \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, що завершує доведення. □

У подальшому нам знадобиться наведений нижче результат по обмеженості розв'язку рекурсій вигляду (1.1). Ми доведемо його для рекурсій (більш загального) вигляду

$$a_0 := a, \;\; a_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} a_k, \; n \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

де $(p_{n,k})_{0\le k\le n}$ є розподілом ймовірностей з $p_{n,n} < 1$ та $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є заданою послідовністю дійсних чисел.

Твердження 15. *Нехай існує послідовність $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, така що*

(C1) $\liminf_{n\to\infty} \psi_n \sum_{k=0}^{n}(1-k/n)p_{n,k} > 0$,

(C2) *послідовність $(\psi_k b_k/k)_{k\in\mathbb{N}}$ не зростає.*

Тоді послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, визначена (2.10)*, задовольняє*

$$a_n = O\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k\psi_k}{k}\Big), \;\; n\to\infty. \tag{2.11}$$

Зокрема, (a_n) обмежена, якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k\psi_k}{k}$ збігається.

Доведення. Для зручності будемо писати p_k замість $p_{n,k}$ та покладемо $\pi_k = \sum_{j=0}^{k} p_j$. Використовуючи (C2), маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k\psi_k}{k}\pi_{k-1} \ge \frac{b_n\psi_n}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi_{k-1} = b_n\psi_n\sum_{j=0}^{n-1}(1-j/n)p_j.$$

Згідно з (C1) існують $n_0 \in \mathbb{N}$ та $c > 0$, такі що

$$c\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k\psi_k}{k}\pi_{k-1} \ge b_n\,, \qquad n \ge n_0. \tag{2.12}$$

Згідно з цим, послідовність $x_n := c\sum_{k=1}^{n} b_k\psi_k/k$ задовольняє

$$x_n \ge b_n + \sum_{k=1}^{n} x_k p_k\,, \quad n \ge n_0 \tag{2.13}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}
b_n + \sum_{k=1}^{n} x_k p_k &= b_n + c\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{b_j\psi_j}{j}p_k \\
&= b_n + c\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\psi_j}{j}(1-\pi_{j-1}) \\
&= b_n + c\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\psi_j}{j} - c\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\psi_j}{j}\pi_{j-1} \\
&= x_n + b_n - c\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\psi_j}{j}\pi_{j-1} \overset{(2.12)}{\leq} x_n.
\end{aligned}$$

Покладемо $x_0 := 0$. Віднімаючи (2.10) від (2.13), бачимо що послідовність $y_n := x_n + c_0 - a_n$ задовольняє $y_n \geq \sum_{k=0}^{n} p_k y_k$ для $n \geq n_0$ та довільного c_0. Обираючи $c_0 \geq \max_{n \leq n_0} a_n$ та використавши індукцію, маємо $y_n \geq 0$, для всіх $n \in \mathbb{N}$, що доводить потрібну оцінку для a_n. $\square$

Властивості ітеративних функцій. Для заданої строго зростаючої неперервної функції g, існує єдина обернена функція g^{-1}. Ця функція визначає послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ таким чином

$$A_0 = 0, \quad A_i := (g^{-1})^{\circ(i-1)}(x_0), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Лема 16. *Припустимо, що* $g, h, k \in C^{(m)}[x_0, +\infty)$ *та* $F = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$ *є* m*-раз диференційовною в точці* x_0. *Тоді* F *є* m*-раз диференційовною на множині* $[x_0, +\infty)$.

Доведення. Ми розглянемо випадок $m = 1$, для $m = 2, 3, \ldots$ доведення аналогічне. Оскільки F є сумою суперпозицій функцій з $C^{(1)}[x_0, +\infty)$, то вона є диференційовною на $[x_0, +\infty)\backslash(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Отже ми повинні перевірити неперервність та дифереційовність лише у точках $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Перший крок. Доведення неперервності. За припущенням F є неперервною в точці $A_1 = x_0$, тобто

$$k(x_0) = h(x_0) + k(g(x_0)). \tag{2.15}$$

Для довільного фіксованого $k \geq 2$, з рівності (2.2) випливає

$$F(A_k - 0) \;=\; \sum_{i=1}^{k-1} h(g^{\circ(i-1)}(A_k - 0)) + k(g^{\circ(k-1)}(A_k - 0)), \qquad (2.16)$$

та

$$F(A_k + 0) \;=\; \sum_{i=1}^{k} h(g^{\circ(i-1)}(A_k + 0)) + k(g^{\circ(k)}(A_k + 0)). \qquad (2.17)$$

Використовуючи (2.15) та неперервність h та g, маємо

$$\begin{aligned} & F(A_k + 0) - F(A_k - 0) \\ &\quad = \; h(g^{\circ(k-1)}(A_k)) + k(g^{\circ(k)}(A_k)) - k(g^{\circ(k-1)}(A_k)) \\ &\quad = \; h(x_0) + k(g(x_0)) - k(x_0) \overset{(2.15)}{=} 0. \end{aligned}$$

Другий крок. Доведення диференційовності. З диференційовності F в точці x_0 випливає

$$k'(x_0) = h'(x_0) + k'(g(x_0))g'(x_0). \qquad (2.18)$$

Для $k \geq 2$, використовуючи (2.16) та (2.17) отримуємо

$$\begin{aligned} F'_-(A_k) &= \lim_{x \to A_k - 0} \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{k-1} h(g^{\circ(i-1)}(x)) + k(g^{\circ(k-1)}(x)) \right), \\ F'_+(A_k) &= \lim_{x \to A_k + 0} \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{k} h(g^{\circ(i-1)}(x)) + k(g^{\circ(k)}(x)) \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} & F'_+(A_k) - F'_-(A_k) \\ & = \; \lim_{x \to A_k + 0} \frac{d}{dx} h(g^{\circ(k-1)}(x)) + k(g^{\circ(k)}(x)) - \lim_{x \to A_k - 0} \frac{d}{dx} k(g^{\circ(k-1)}(x)). \end{aligned}$$

Покладемо $u(x) := g^{\circ(k-1)}(x)$, тоді $u(A_k + 0) = u(A_k - 0) = u(A_k) = x_0$ та

$$\begin{aligned} & F'_+(A_k) - F'_-(A_k) \\ & = \; \lim_{x \to A_k + 0} \frac{d}{dx} h(u(x)) + k(g(u(x))) - \lim_{x \to A_k - 0} \frac{d}{dx} k(u(x)) \\ & = \; \lim_{x \to A_k + 0} (h'(u(x)) + k'(g(u(x)))g'(u(x)))u'(x) - \lim_{x \to A_k - 0} k'(u(x)))u'(x) \\ & = \; (h'(x_0) + k'(g(x_0))g'(x_0) - k'(x_0))u'(x_0) = 0, \end{aligned}$$

з рівності (2.18). Лема доведена. $\square$

З доведеної леми випливає, що функція F є m-раз диференційовною, якщо функція k задовольняє умовам

$$\begin{aligned} &k(x_0) = h(x_0) + k(g(x_0)),\\ &k'(x_0) = h'(x_0) + k'(g(x_0))g'(x_0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &k^{(m)}(x_0) = h^{(m)}(x_0) + (k(g(x_0)))^{(m)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Наступна лема доводить існування такої функції k.

Лема 17. *Припустимо, що* $W\Big(x - g(x), \dots, x^{m+1} - g^{m+1}(x)\Big)\Big|_{x=x_0} \neq 0$. *Тоді існує функція* $k(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i$, *що задовольняє (2.19).*

Доведення. Підставляючи представлення $k(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i$ у (2.19), маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &\Big(\alpha_1(x_0 - g(x_0)) + \ldots + \alpha_{m+1}(x_0^{m+1} - g^{m+1}(x_0))\Big) = h(x_0),\\ &\Big(\alpha_1 \tfrac{d}{dx}(x - g(x)) + \ldots + \alpha_{m+1}\tfrac{d}{dx}(x^{1+m} - g^{m+1}(x))\Big)\Big|_{x=x_0} = h'(x_0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\Big(\alpha_1 \tfrac{d^m}{dx^m}(x - g(x)) + \ldots + \alpha_{m+1}\tfrac{d^m}{dx^m}(x^{m+1} - g^{m+1}(x))\Big)\Big|_{x=x_0} = h^{(m)}(x_0). \end{aligned}$$

Визначник цієї системи дорівнює $W(x_0)$ і не обертається в нуль за припущенням. Отже, існує єдиний розвязок системи, а отже функція k коректно визначена і задовольняє умовам (2.19). □

Результат, аналогічний доведеній вище лемі (13), для неперервного аргументу міститься у наступній теоремі.

Теорема 18. *Нехай трійки* (h_1, g, x_0) *та* (h_2, g, x_0) *породжують ітеративні функції* f_1 *та* f_2*, відповідно. Припустимо що* $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = +\infty$. *Тоді*

I. з $h_2(x) \sim h_1(x)$, $x \to \infty$ *випливає* $f_2(x) \sim f_1(x)$, $x \to \infty$, *та*

II. з $h_2(x) = o(h_1(x))$, $x \to \infty$ *випливає* $f_2(x) = o(f_1(x))$, $x \to \infty$.

2.2. Час поглинання спадних ланцюгів Маркова

2.2.1. Основний результат. У цьому підрозділі ми досліджуємо слабку збіжність часу поглинання X_n, визначеного формулою (5). Нагадаємо, що розподіл індексу I_n задається формулою (6).

Теорема 19. *Припустимо що для довільного $x > 0$ існує границя*

$$\Phi(x) := \lim_{n\to\infty} n(1 - \mathbb{E}(I_n/n)^x), \tag{2.20}$$

та $\Phi(x)$ скінченна для деякого $x > 0$. Тоді, при $n \to \infty$,

$$X_n/n \xrightarrow{d} \int_0^\infty e^{-\sigma_t} \mathrm{d}t, \tag{2.21}$$

де $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ – субординатор з експонентою Леві $\Phi(x)$.

Зауваження 20. Згідно з формулою Леві-Хінчина, функція $\Phi(x)$ може бути записана у вигляді

$$\Phi(x) = \lambda + \kappa x + \int_0^\infty (1 - e^{-tx})\rho(\mathrm{d}t),\ x \geq 0,$$

де $\lambda \geq 0$ – інтенсивність поглинання, $\kappa \geq 0$ – зсув та ρ – міра Леві субординатора (σ_t).

2.2.2. Доведення теореми 19. Для $n \in \mathbb{N}$ та $k \in \mathbb{N}_0$, покладемо

$$m_n^{(k)} := \mathbb{E}X_n^k \ \text{ та } \ M_n^{(k)} := \mathbb{E}(X_n/n)^k.$$

Нам знадобиться допоміжний результат.

Лема 21. *Для фіксованого $k \in \mathbb{N}$,*

$$m_1^{(k)} = 0, \quad m_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j-1} m_n^{(j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = i\} m_i^{(k)}, \quad n \geq 2.$$

Доведення. Для фіксованих $k \in \mathbb{N}$ та $n \geq 2$, використовуючи (4), маємо

$$\begin{aligned}
m_n^{(k)} &= \mathbb{E}(1 + X_{I_n})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathbb{E} X_{I_n}^i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathbb{E}(X_n - 1)^i \\
&+ \mathbb{E} X_{I_n}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} m_n^{(j)} (-1)^{i-j} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = i\} m_i^{(k)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} m_n^{(j)} \sum_{i=j}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = i\} m_i^{(k)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (-1)^{k-j-1} m_n^{(j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = i\} m_i^{(k)}.
\end{aligned}$$

Остання рівність випливає з тотожності

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} &= \frac{k!}{j!} \sum_{i=j}^{k-1} \frac{(-1)^{i-j}}{(k-i)!(i-j)!} \\
&= \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{k-j-1} \binom{k-j}{i} (-1)^i \\
&= \binom{k}{j} \Big(\sum_{i=0}^{k-j} \binom{k-j}{i} (-1)^i - (-1)^{k-j} \Big) \\
&= \binom{k}{j} (-1)^{k-j-1}.
\end{aligned}$$

□

Доведення теореми 19. Припустивши, що (2.20) виконується, покладемо

$$\Psi_n(x) := \mathbb{E}(I_n/n)^x = \mathbb{E} \exp(-x(\ln n - \ln I_n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді, для довільного $x > 0$,

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} n(1 - \Psi_n(x)) = \lim_{n \to \infty} \Big(- n \ln \Psi_n(x) \Big).$$

З цього випливає, що $\Phi(x) = -\ln \phi(x)$, де $\phi(x)$ є перетворенням Лапласа-Стілт'єса деякого (можливо невласного) розподілу $\mu \neq \delta_\infty$ на $[0, \infty]$. Отже, $\Phi(x)$ є експонентою Лапласа деякого субординатора (σ_t). Також маємо, що

$$\mathbb{E} \Big(\int_0^\infty e^{-\sigma_t} \mathrm{d}t \Big)^k = \frac{k!}{\Phi(1) \cdots \Phi(k)} =: l^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

і розподіл останнього інтеграла однозначно визначаєтся своїми моментами. У випадку $\lambda = 0$ (нульова інтенсивність поглинання) це випливає з [24, Теорема 2(i)], а у випадку $\lambda > 0$ це можна встановити так. Маємо

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_t}\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-\sigma_t}\mathrm{d}t \overset{d}{=} \int_0^T e^{-\sigma_t^*}\mathrm{d}t,$$

де (σ_t^*) є субординатором з експонентою Лапласа $\Phi^*(x) = \Phi(x) - \lambda$, а T – показникова в.в. з параметром λ, що не залежить від обох субординаторів. Використовуючи [24, Теорема 2(i)], робимо висновок, що

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\sigma_t^*}\mathrm{d}t\right)^k = \frac{k!}{(\lambda+\Phi^*(1))\cdots(\lambda+\Phi^*(k))} = l^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Отже, для доведення (2.21) достатньо показати, що для кожного $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} M_n^{(k)} = l^{(k)}. \tag{2.22}$$

Для $k \in \mathbb{N}_0$ визначимо

$$a_n^{(k)} := n^k(M_n^{(k)} - l^{(k)}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Індукцією по k ми доведемо, що $a_n^{(k)} = o(n^k)$, при $n \to \infty$, для $k \in \mathbb{N}_0$. Оскільки $a_n^{(0)} = 0$, то це вірно для $k = 0$. Нехай $a_n^{(j)} = o(n^j)$ для $j \le k-1$, тобто, (2.22) виконується якщо k змінити на j при $j \le k-1$. З цього факту та леми 21 випливає, що для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$, послідовність $(M_n^{(k)})$ задовольняє рівність

$$M_1^{(k)} = 0, \quad M_n^{(k)} = kM_n^{(k-1)}/n + o(1/n) + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}\{I_n = i\}(i/n)^k M_i^{(k)}, \quad n \ge 2.$$

Тому

$$a_n^{(k)} = c_n^{(k)} + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}\{I_n = i\}a_i^{(k)}, \; n \in \mathbb{N},$$

де

$$c_n^{(k)} := n^{k-1}\Big(n\Big(\mathbb{E}(I_n/n)^k - 1\Big)l^{(k)} + kl^{(k-1)}\Big) + o(n^{k-1}).$$

При $n \to \infty$, вираз у дужках прямує до $-\Phi(k)l^{(k)} + kl^{(k-1)} = 0$. Тому $c_n^{(k)} = o(n^{k-1})$. Неважко перевірити, що $|a_n^{(k)}| \le \sum_{i=1}^n |c_i^{(k)}|$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки зі звичайної збіжності випливає збіжність за Чезаро, ми отримуємо

$$\frac{|a_n^{(k)}|}{n^k} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|c_i^{(k)}|}{i^{k-1}} \to 0,$$

при $n \to \infty$. Доведення завершено. $\square$

2.2.3. Приклад. У цьому прикладі X_n/n слабко збігається до випадкової величини з розподілом бета(a, b) з щільністю

$$x \mapsto \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} 1_{(0,1)}(x). \tag{2.23}$$

Приклад 22. Нехай $\alpha > -1$, δ, γ – невід'ємні константи, нехай $\gamma/(1+\alpha) \leq \delta$. Для досить великих $n \in \mathbb{N}$ покладемо:

$$\mathbb{P}\{I_n = n-1\} = 1 - \frac{\delta}{n}, \quad \mathbb{P}\{I_n = k\} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \frac{\gamma}{n^2}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-2,$$

та

$$\mathbb{P}\{I_n = 1\} = \frac{\delta}{n} - \frac{\gamma}{n^2} \sum_{k=2}^{n-2} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}.$$

Тоді (2.20) виконуєтсья з

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= x + \delta - \frac{\gamma}{x+\alpha+1} = \left(\delta - \frac{\gamma}{\alpha+1}\right) + x + \frac{\gamma}{\alpha+1} - \frac{\gamma}{x+\alpha+1} \\
&= \left(\delta - \frac{\gamma}{\alpha+1}\right) + x + \gamma \int_0^{\infty} (1 - e^{-xt}) e^{-(\alpha+1)t} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Тому $\Phi(x)$ є експонентою Лапласа деякого субординатора з інтенсивністю поглинання $\delta - \gamma/(\alpha+1)$, одиничним зсувом та мірою Леві ρ, що визначається формулою

$$\rho(\mathrm{d}t) = \gamma e^{-(\alpha+1)t} 1_{(0,\infty)}(t) \mathrm{d}t.$$

Якщо покласти $\delta := \gamma/(\alpha+1) > 0$, то $X_n/n \xrightarrow{d}$ бета$(\alpha+2, \delta)$ при $n \to \infty$, якщо ж взяти $\delta > 0$ та $\gamma := 0$, то $X_n/n \xrightarrow{d} \mathrm{beta}(1, \delta)$, при $n \to \infty$. Отже, робимо висновок, що множина можливих граничних розподілів для X_n/n містить бета(a, b) розподіли з параметрами $a \geq 1$ та $b > 0$ і вони є розподілами експоненційних функціоналів від деяких субординаторів.

Зауважимо, що не існує субординатора для якого експоненційний функціонал мав би бета(a, b) розподіл з $a < 1$. Дійсно, припустивши супротивне, ми мали б, що експонента Лапласа рівна $x \mapsto \frac{x(x+a+b-1)}{x+a-1}$. Це, очевидно, неможливо, оскільки ця функція не є монотонною на $(0, \infty)$ якщо $a < 1$.

2.3. Висновки до розділу 2

У першій частині розділу запропоновано новий метод дослідження асимптотичної поведінки моментів лінійних випадкових рекурсивних послідовностей – метод ітеративних функцій. Зокрема, доведено теореми про достатні умови застосовності методу та наведено багато прикладів його застосування до відомих з літератури випадкових лінійних рекурсивних послідовностей.

Основними перевагами методу є його загальність та відносна простота застосування, проте він не позбавлений певних недоліків, серед яких можна відмітити такі:

- Необхідною умовою застосовності методу є розбіжність (a_n), розв'язку (1.1). Зокрема, метод не може бути застосованим для дослідження збіжності (a_n) до константи.
- Метод дає відповідь у вигляді ітеративної функції, для якої, іноді, буває важко встановити асимптотично еквівалентну їй елементарну функцію.
- Якщо виконується умова (2.6), то обчислення константи $d \neq 0$ може викликати певні труднощі.

У другій частині розділу, з використанням методу моментів, було досліджено час поглинання спадного ланцюга Маркова та наведено достатні умови збіжності нормованого часу поглинання до експоненційного функціоналу від субординатора з відомою експонентою Лапласа.

Розділ 3

Гратки Бернуллі

3.1. Означення та обговорення

В класичній схемі зайнятості кулі незалежно одна від одної розміщуються по нескінченній кількості урн з ймовірністю p_k потрапляння в урну з номером $k = 1, 2, \dots,$ де $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – це фіксовний набір невід'ємних частот з одиничною сумою. Один з цікавих для дослідження параметрів цієї схеми – це число K_n урн, що містять хоча б одну кулю з n розміщених. В конкретних застосуваннях "урни" можуть представляти розрізнені біологічні види, тоді K_n – це число різноманітних видів, що представлені у вибірці розміру n.

Менш дослідженими є змішані моделі в яких самі частоти є в.в. $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$, а кулі розміщуються незалежно одна від одної при фіксованому середовищі $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Структура розміщення куль по урнам в цій ситуації зумовлена як вибірковою випадковістю так і випадковістю середовища. По відношенню до K_n середовище називається *сильним*, якщо випадковість частот (P_k) є домінуючою над вибірковою випадковістю. Цю ідею можна вловити розглянувши умовне математичне сподівання

$$R_n^* := \mathbb{E}\big(K_n \,|\, (P_k)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(1 - (1 - P_k)^n\big)$$

та порівнявши флуктуації K_n відносно R_n^* з флуктуаціями самого R_n^*. Згідно з законом великих чисел Карліна [78], м.н. має місце еквівалентність

$K_n \sim R_n^*$, з чого випливає, що середовище буде сильним, зокрема, якщо R_n^* та K_n, нормалізовані відповідними (однаковими) константами, слабко збігаються до одного й того ж самого граничного розподілу, див. [58] для прикладів.

В цьому розділі ми зосередимо увагу на асимпотичній поведінці величини K_n для *гратки Бернуллі* [51, 55, 56, 49], яка є схемою зайнятості Карліна з випадковими частотами, які задаються формулою

$$P_k := W_1 W_2 \cdots W_{k-1}(1 - W_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

де $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є незалежними копіями в.в. W зі значеннями з $(0, 1)$. З точки зору теорії регенеративних комбінаторних структур K_n є числом блоків у регенеративній композиції [16, 57, 58], що породжена узагальненим процесом Пуассона зі стрибком розподіленим як $|\ln W|$. Дискретний розподіл ймовірностей з випадковими массами, що задаються формулою (3.1) іноді називається залишковою моделлю розміщення, найвідомішим прикладом якої є розміщення, асоційоване з формулою вибірок Юенса, в якій в.в. W має бета$(c, 1)$ для деякого $c > 0$. Згідно з термінологією [49, 55], частоти (3.1) можна розглядати як довжини інтервалів, що отримуються розбиттям сегменту $[0, 1]$ точками мультиплікативного процесу відновлення $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, де

$$Q_0 := 1, \quad Q_j := \prod_{i=1}^{j} W_i, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Таким чином урни можна ідентифікувати з відкритими інтервалами (Q_k, Q_{k-1}), а кулі – з точками вибірки $U_1, \ldots, U_n$ з рівномірного на $[0, 1]$ розподілу, незалежної від (Q_k). У цьому представленні кулі з номерами i та j потрапляють в одну урну тоді і лише тоді, коли U_i та U_j належить одному й тому ж інтервалу.

В подальшому ми припускаємо, що розподіл $|\ln W|$ неарифметичний та використовуємо такі позначення для моментів

$$\mu := \mathbb{E}|\ln W|, \quad \sigma^2 := \mathbb{D}(\ln W) \;\text{ та }\; \nu := \mathbb{E}|\ln(1 - W)|,$$

які можуть бути скінченними чи нескінченними.

В цьому розділі ми знайдемо слабку асимптотичну поведінку K_n за допомогою аналізу процесу

$$\begin{aligned} N^*(x) &:= \#\{k \in \mathbb{N} : P_k \geq e^{-x}\} \\ &= \#\{k \in \mathbb{N} : W_1 \cdots W_{k-1}(1-W_k) \geq e^{-x}\}, \quad x > 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

при великих x. На відміну від підходу, запропонованого у [55], цей підхід дозволяє одночасно розглянути випадки скінченного та нескінченного ν і дає можливість побачити яким чином центрування K_n має бути уточнене у випадку $\nu = \infty$. Наголосимо, що зв'язок між K_n та $N^*(x)$ стає зрозумілим лише тоді, коли гратка Бернуллі розглядається як схема зайнятості з випадковими частотами (у випадковому середовищі), а процес K_n аналізується при фіксованому середовищі. Ми сподіваємось, що метод, запропонований тут, може бути використаний для аналізу загальних схем зайнятості у випадкових середовищах.

3.2. Ланцюги Маркова та випадкові рекурсії.

Випадковий вектор, побудований з чисел зайнятості урн по яким розміщується n однакових куль, утворює випадковий комбінаторний об'єкт – *слабку композицію* C_n^*, утворену з невід'ємних чисел з сумою n. Прикметник "слабка" , означає, що нульові елементи дозволені, наприклад послідовність $(2, 3, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ (з нескінченною кількістю дописаних 0-ів) є можливим значенням C_7^*. Відкидання нульових частин дає *композицію* C_n числа n. Впорядкування C_n у незростаючому порядку дає *розбиття* n.

Якщо C_n^* породжується граткою Бернуллі, то відповідне розбиття можна назвати *розбиттям породженим "ламанням палиці" (stick-breaking partition)* . У цьому випадку елементи C_n^* можна ототожнити (див. [57, с. 452]) з величинами стрибків незростаючого ланцюга Маркова $Q_n^* = (Q_n^*(k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ з множиною станів $\mathbb{N}$, який стартує в стані n та має ймовірність переходу з n в m, яка задається формулою

$$q^*(n, m) = \binom{n}{m} \mathbb{E}(1-W)^{n-m} W^m, \quad m = 0, \ldots, n.$$

Аналогічно, елементи композиції C_n можна ототожнити з величинами стрибків спадного ланцюга Маркова $Q_n = (Q_n(k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ з ймовірностями переходів

$$q(n,m) = \binom{n}{m}\frac{\mathbb{E}(1-W)^{n-m}W^m}{1-\mathbb{E}W^n}, \quad m = 0,\ldots,n-1.$$

Визначимо величину M_n як індекс останнього зайнятого інтервалу у гратці Бернуллі, тобто таке k, що $Q_k < \min(U_1,\ldots,U_n) < Q_{k-1}$, та визначимо число порожніх інтервалів з індексом, що не перевищує M_n формулою $L_n := M_n - K_n$. З марківської властивості випливає (див. [55, Розділ 3]), що мають місце рівності розподілів вигляду (4) (третя – вигляду (1)):

$$M_0 = 0, \quad M_n =_d M'_{Q^*_n(1)} + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$K_0 = 0, \quad K_n =_d K'_{Q_n(1)} + 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

$$L_0 = 0, \quad L_n =_d L'_{Q^*_n(1)} + 1_{\{Q^*_n(1)=n\}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

де у правій частині M'_j та L'_j не залежать від $Q^*_n(1)$ та розподілені як M_j та L_j, відповідно, для кожного $j \in \mathbb{N}$, а в.в. K'_j не залежить від $Q_n(1)$ та розподілена як K_j для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Аналіз цих рекурентних співвідношень відомими методами є складною задачею і вимагає накладання додаткових обмежень на моменти $Q_n(1)$ або $Q^*_n(1)$. З іншого боку, "склеювання" (coupling) з мультиплікативним процесом відновлення дає змогу успішно аналізувати композиції C^*_n. Наприклад, нехай $g_{n,m}$ – це потенціальна функція ланцюга Маркова Q_n, тобто ймовірність того, що Q_n потрапить у стан m:

$$g_{n,m} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Q_n(j) = m\}.$$

Склеювання дає (див. [49, Твердження 5])

$$\lim_{n\to\infty} g_{n,m} = \frac{1-\mathbb{E}W^m}{\mu m} \tag{3.6}$$

(де права частина рівна нулю, якщо $\mu = \infty$).

3.3. Число зайнятих інтервалів

Покладемо

$$\rho^*(x) := \inf\{k \in \mathbb{N} : W_1 W_2 \dots W_k < e^{-x}\}, \quad x > 0. \tag{3.7}$$

Один з основних результатів розділу міститься у наступній теоремі.

Теорема 23. *Якщо існують функції $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ та $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, такі що $(\rho^*(x) - g(x))/f(x)$ слабко збігається (при $x \to \infty$) до деякого власного невиродженого розподілу, то $(X_n - b_n)/a_n$ слабко збігається (при $n \to \infty$) до того самого розподілу, де замість X_n можна взяти K_n або $N^*(\ln n)$. Константи визначаються так*

$$b_n = \int_0^{\ln n} g(\ln n - y)\, \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \in \mathrm{d}y\}, \quad a_n = f(\ln n).$$

Безпосереднім наслідком наведеної вище теореми та [55, Твердження A.1] є наступна теорема. Вона описує режими збіжності та дає явний вигляд центруючих та нормуючих констант.

Теорема 24. *Умова теореми 23 виконуються тоді і лише тоді, коли розподіл $|\ln W|$ належить області притягання стійкого закону або функція $\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}$ повільно змінюється на нескінченності. Існує п'ять режимів збіжності:*

(a) *Якщо $\sigma^2 < \infty$ то з*

$$b_n = \mu^{-1}\left(\ln n - \int_0^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}\mathrm{d}x\right) \tag{3.8}$$

та $a_n = (\mu^{-3}\sigma^2 \ln n)^{1/2}$, послідовність $(K_n - b_n)/a_n$ слабко збігається до стандартної нормальної в.в.

(b) *Якщо $\sigma^2 = \infty$ та*

$$\int_0^x y^2\, \mathbb{P}\{|\ln W| \in \mathrm{d}y\} \;\sim\; L(x) \quad x \to \infty,$$

для деякої функції L, що повільно змінюється на нескінченності, то при b_n, визначеними формулою (3.8) та $a_n = \mu^{-3/2} c_{[\ln n]}$, де (c_n) – це довільна додатна послідовність, така що $\lim_{n\to\infty} nL(c_n)/c_n^2 = 1$, *послідовність* $(K_n - b_n)/a_n$ *слабко збігається до стандартної нормальної в.в.*

(c) *Якщо*

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \;\sim\; x^{-\alpha}L(x), \quad x \to \infty, \tag{3.9}$$

для деякої функції L, *що повільно змінюється на нескінченності та* $\alpha \in (1,2)$, *то з* b_n, *визначеним формулою* (3.8) *та* $a_n = \mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c_{[\ln n]}$, *де* (c_n) – *це довільна додатна послідовність, така що* $\lim_{n\to\infty} nL(c_n)/c_n^{\alpha} = 1$, *послідовність* $(K_n - b_n)/a_n$ *слабко збігається до* α*-стійкої в.в. з х.ф.*

$$t \mapsto \exp\{-|t|^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)(\cos(\pi\alpha/2) + i\sin(\pi\alpha/2)\,\mathrm{sgn}(t))\},\ t \in \mathbb{R}.$$

(d) *Нехай* (3.9) *виконується з* $\alpha = 1$ *та* $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – *це довільна неспадаюча функція, така що* $\lim\limits_{x\to\infty} x\mathbb{P}\{|\ln W| > r(x)\} = 1$. *Покладемо*

$$m(x) := \int_0^x \mathbb{P}\{|\ln W| > y\}\mathrm{d}y, \quad x > 0.$$

Тоді з

$$b_n := \int_0^{\ln n} \frac{\ln n - y}{m(r((\ln n - y)/m(\ln n - y)))}\,\mathbb{P}\Big\{\Big|\ln(1-W)\Big| \in \mathrm{d}y\Big\}$$

та

$$a_n := \frac{r(\ln n/m(\ln n))}{m(\ln n)},$$

послідовність $(K_n - b_n)/a_n$ *слабко збігається до* 1*-стійкої в.в. з х.ф.*

$$t \mapsto \exp\{-|t|(\pi/2 - i\ln|t|\,\mathrm{sgn}(t))\},\ t \in \mathbb{R}.$$

(e) *Якщо* (3.9) *виконується при* $\alpha \in [0,1)$, *то при* $b_n \equiv 0$ *та* $a_n := \ln^{\alpha} n/L(\ln n)$, *послідовність* K_n/a_n *слабко збігається до в.в. з розподілом Міттаг-Леффлера з параметром* θ_α *з моментами*

$$\int_0^\infty x^k\ \theta_\alpha(\mathrm{d}x) \;=\; \frac{k!}{\Gamma^k(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В теоремі 35 даної роботи доведено (див. також [55, 56]), що

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n = \nu/\mu, \tag{3.10}$$

якщо $\nu < \infty$. В роботі [55] доведено, що слабка асимптотична поведінка величин M_n та $\rho^*(\ln n)$ однакова. З цього твердження випливає, що за умови $\nu < \infty$ слабка поведінка K_n співпадає з слабкою поведінкою $\rho^*(\ln n)$, тобто, за умови $\nu < \infty$, поведінка послідовності L_n не впливає на асимптотику K_n. Очевидно цей результат є окремим випадком Теореми 23, оскільки при $\nu < \infty$ маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x) - \int_0^x g(x-y)\,\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \in \mathrm{d}y\}}{f(x)} = 0 \tag{3.11}$$

(див. зауваження 33 для доведення цього факту).

В теоремі 23 стверджується, що при виконанні умови $\nu = \infty$ асимптотика L_n може впливати на асимптотику K_n, що відбувається у випадку, коли (3.11) не виконується, а отже двочленне центрування є необхідним. Наступний приклад пояснює це явище.

Приклад 25. Припустимо, що для деякого $\gamma \in (0, 1/2)$,

$$\mathbb{P}\{W > x\} = \frac{1}{1 + |\ln(1-x)|^\gamma}, \quad x \in [0, 1).$$

Тоді

$$\mathbb{E}\ln^2 W < \infty \ \text{ та } \ \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\} \sim x^{-\gamma} \quad \text{при } x \to \infty,$$

і у цьому випадку,

$$a_n = \mathrm{const}\ln^{1/2} n \ \text{ та } \ b_n = \mu^{-1}(\ln n - (1-\gamma)^{-1}\ln^{1-\gamma} n + o(\ln^{1-\gamma} n)).$$

Отже, другий член центрування $b_n - \mu^{-1}\ln n$ не може бути відкинутим, більш того з теореми 35 випливає, що

$$\mathbb{E}L_n \sim \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}W^k}{k} \ \sim \ b_n - \mu^{-1}\ln n \ \sim \ \frac{1}{\mu(1-\gamma)}\ln^{1-\gamma} n,$$

що демонструє суттєвий вклад L_n в асимптотику K_n у порівнянні з вкладом M_n.

Для асимптотичного аналізу ми використаємо техніку пуассоніазції-депуассонізації. Ми розглянемо пуассонізовану версію схеми розміщення в якій кожна нова куля кидається в момент стрибка однорідного процесу Пуассона одиничної інтенсивності. Випадкові величини в цій моделі повязується з неперервним параметром t (часом) і будуть позначатись $K(t), R^*(t)$ і т.д. Наприклад, середнє число зайнятих інтервалів на проміжку часу $[0, t]$ при фіксованому середовищі (P_k), дорівнює

$$R^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-t} t^n / n!) R_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-tP_k}).$$

Перевагою пуассонізованої моделі є те, що при фіксованому середовиищі (P_k), кількість точок в інтервалі з номером $1, 2, \ldots$ утворює пуассонівський процес з інтенсивністю $P_1, P_2, \ldots$, відповідно, і ці процеси незалежні.

Випадкова величина $N^*(x)$ – це число візитів інтервалу $[0, x]$ збуреним випадковим блуканням (див. нижче), породженим парою $(|\ln W|, |\ln(1 - W)|)$. Для дослідження асимптотики цієї величини ми розробимо теорію відновлення для збурених випадкових блукань, яка може бути цікавою сама по собі.

3.3.1. Теорія відновлення для збурених випадкових блукань. Означення та основні властивості. Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – це незалежні копії випадкового вектора (ξ, η). На сумісний розподіл компонент $\xi > 0$ та $\eta \geq 0$ не накладається жодних обмежень. Припустимо, що розподіл ξ неарифметичний, хоча всі результати можуть бути поширені на загальний випадок. Нехай $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ – це звичайне випадкове блукання, що стартує в нулі та має крок ξ_k.

Означення 26. Послідовність $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, що визначена

$$T_k := S_{k-1} + \eta_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

називається збуреним випадковим блуканням.

Таке визначення наведено у [1] (див. також [10] та [64, Розділ 6]). Оскільки $\lim\limits_{k \to \infty} T_k = \infty$ м.н., то для довільного $x > 0$ існує скінченне число

$$N(x) := \#\{k \in \mathbb{N} : T_k \leq x\}, \quad x \geq 0,$$

візитів у інтервал $[0, x]$. Нехай

$$R(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \Big(1 - \exp\left(-xe^{-T_k}\right)\Big), \quad x \geq 0. \tag{3.12}$$

Метою цього пункту є знаходження умов за яких, відповідним чином нормовані та центровані величини $N(x)$ та $R(x)$ слабко збігаються, при $x \to \infty$, до деякого невиродженого власного розподілу.

Зрозуміло, що число $N^*(x)$ слід порівнювати з числом відновлень

$$\rho(x) := \#\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k \leq x\} \ = \ \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > x\}, \quad x \geq 0.$$

У випадку $\mathbb{E}\eta < \infty$ із слабкої збіжності однієї з величин $(\rho(x) - g(x))/f(x)$ та $(N(x) - g(x))/f(x)$ (з підхожими f, g) випливає зібжність іншої до того ж самого розподілу. Це є наслідком того, що при $\mathbb{E}\eta < \infty$, маємо $\mathbb{E}(\rho(x) - N(x)) = O(1)$. Це в свою чергу випливає з аргументів наведених нижче. Тому ми фокусуємо увагу на випадку коли вклад величин η_k у асимптотику $N(x)$ є суттєвим. Наскільки автору відомо, в літературі питання про асимптотику збуреного випадкового блукання вирішується накладанням певних моментних обмежень, що дозволяє безпосереднє зведення до $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (див., наприклад, [64, Розділ 6], [68], [107, Теореми 2.1 та 2.2]).

У зауваженні 27 наведено деякі властивості функції f, які знадобляться у доведеннях.

Зауваження 27. Припустимо, що $\frac{\rho(x)-g(x)}{f(x)}$ слабко збігається до невиродженого власного розподілу, а центрування $g(x)$ не може бути відкинутим. Тоді, згідно з [55, Твердження A.1], функцію f можна обрати такою, що $f(\ln n) = a_n$, де a_n визначено у теоремі 23 та наслідку 24. Використовуючи результат по асимптотиці функцій, обернених до таких, що правильно змінюються (див. [26, Теорема 1.5.12]), робимо висновок, що $f(x)$ правильно змінюється на нескінченості з індексом $\beta \in [1/2, 1]$. Зокрема, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ та $f(\ln x)$ повільно змінюється на нескінченності. Наступний факт, що нам знадобиться: $f(x)$ зростає не повільніше за $\sqrt{x}$. Це очевидно у випадках $\beta \in (1/2, 1]$ (тоді $\mathbb{P}\{\xi > x\}$ правильно змінюється на нескінченності з параметром $-\beta$) та $f(x) \sim \mathrm{const}\sqrt{x}$ (тоді $\mathbb{D}\,\xi < \infty$).

У випадку $\int_0^x y^2\mathbb{P}\{\xi\in \mathrm{d}y\}\sim \ell(x)$ та $\lim\limits_{x\to\infty}\ell(x)=\infty$, де ℓ повільно змінюється на ∞, $f(x)$ задовольняє співвідношення $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ell(f(x))}{f^2(x)}=1$. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\ell(f(x))=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(x/f^2(x))=0$.

Нагадаємо таку властивість процесу відновлення: для $x,y\geq 0$

$$\rho(x+y)-\rho(x)\leq\rho'(x,y)\overset{d}{=}\rho(y)\quad \text{м.н.},\tag{3.13}$$

де процес $\rho'(x,y):=\inf\{k-\rho(x)\in\mathbb{N}: S_k-S_{\rho(x)}>y\}$ не залежить від $\rho(x)$ та розподілений як $(\rho(y))_{y\geq 0}$.

Введемо функцію відновлення для випадкового блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ рівністю $U(x)=\mathbb{E}\rho(x)=\sum_{k=0}^\infty\mathbb{P}\{S_k\leq x\}$. З нерівності (3.13) та леми Фекета випливає, що

$$U(x+y)-U(y)\leq C_1y+C_2,\quad x,y\geq 0,\tag{3.14}$$

для деяких додатних C_1 та C_2.

Зафіксуємо функцію $f>0$. Функції g_1,g_2 називаються f-*еквівалентними* якщо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g_1(x)-g_2(x)}{f(x)}=0.$$

У подальшому ми розглядатимемо функції, які входять у центрування, з точністю до вказаної еквівалентності. Наприклад, якщо ми пишемо $g=0$, то мається на увазі, що g є f-еквівалентом 0 для деякої (залежної від контексту) f, що є нормалізацією деякої послідовностей в.в.

Наступна лема буде застосована при доведені теореми 32.

Лема 28. *Якщо* $\frac{\rho(x)-g(x)}{f(x)}$ *слабко збігається, то*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)-g(x-y)}{f(x)}=0\quad \textit{локально рівномірно по } y\geq 0,\tag{3.15}$$

та, для довільного $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x g(x-y)\,\mathrm{d}G(y)-\int_0^{x+\lambda}g(x+\lambda-y)\,\mathrm{d}G(y)}{f(x)}=0,\tag{3.16}$$

де G – *довільна функція розподілу з* $G(0)=0$.

Доведення. Перш за все нагадаємо, що згідно з зауваженням 27, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Очевидно, що (3.15) є властивістю класу f-еквівалентних функцій g, тому (3.15) можна перевіряти лише для одного з представників класу.

Ми використаємо список можливих граничних законів та відповідних нормалізацій для $\rho(x)$ (див., наприклад, [55, Твердження A.1]). Відношення (3.15) очевидно виконується при $g(x) \equiv 0$. Відомо, що $g(x)$ не може бути обраною тотожнім нулем у випадку, коли ξ належить області притягання α-стійкого розподілу з $\alpha \in [1, 2]$. Відомо, якщо ξ лежить у області притягання стійкого розподілу з параметром $\alpha \in (1, 2]$, то можна обрати $g(x) = x/\mathbb{E}\xi$, що задовольняє (3.15).

Отже, єдиний випадок, що потребує розгляду, це випадок в якому ξ належить області притягання 1-стійкого закону. Згідно з [8, Теорема 3], можна обрати

$$g(x) = \frac{x}{m(r(x/m(x)))},$$

де $m(x) := \int_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y$, $r(x)$ – довільна неспадна функція для якої $\lim_{x\to\infty} x\mathbb{P}\{\xi > r(x)\} = 1$. З того що функція $m(x)$ є вгнутою випливає, що функція $x \mapsto x/m(x)$ є неспадною. Тому $x \mapsto m(r(x/m(x)))$ є неспадною, як суперпозиція трьох неспадних функцій. Тому, для довільного $\gamma \in (0, 1)$,

$$g(\gamma x) \geq \gamma g(x), \quad x > 0,$$

що дає субадитивність

$$g(x) + g(z) \geq \left(\frac{x}{x+z} + \frac{z}{x+z}\right) g(x+z) = g(x+z).$$

Отже,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g(x) - g(x-y)}{f(x)} \leq 0.$$

Протилежна нерівність для нижньої границі очевидна у випадку неспадної g з класу f-еквівалентності. Згідно з [8, Теорема 2], функцію g можна обрати як обернену до $x \mapsto xm(r(x))$, а ця функція неспадна.

Локальна рівномірність, згадана в лемі, випливає з доведення. Формула (3.16) випливає з субадитивності b та простих оцінок. $\square$

Випадок без центрування. Розглянемо критерій слабкої збіжності $\rho(x)$ та $R(x)$ у випадку коли центрування непотрібне.

Теорема 29. *Нехай* $Y(x)$ *– довільна з величин* $\rho(x)$, $N(x)$ *чи* $R(e^x)$, *такі умови еквівалентні:*

(a) *існує функція* $f(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *така що, при* $x \to \infty$, $Y(x)/f(x)$ *слабко збігається до власного та невиродженого розподілу,*

(b) *для деякого* $\alpha \in [0,1)$ *та деякої функції* L, *що повільно змінюється на нескінченності,*

$$\mathbb{P}\{\xi > x\} \sim x^{-\alpha} L(x), \quad x \to \infty. \tag{3.17}$$

Якщо (3.17) *виконується, то граничний розподіл є розподілом Міттаг-Леффлера* θ_α, *та можна обрати* $f(x) = x^\alpha / L(x)$.

Припущення теореми 29 відносно $\rho(x)$ випливають з [55, Твердження A.1]. Для двох інших величин результат є наслідком наступної леми.

Лема 30. *Маємо*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{\rho(x)} = 1 \quad \text{за ймовірністю}$$

та

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{\rho(\ln x)} = 1 \quad \text{за ймовірністю.}$$

Доведення. З визначення збуреного випадкового блукання маємо

$$\rho(x-y) - \sum_{j=1}^{\rho(x)} 1_{\{\eta_j > y\}} \le N(x) \le \rho(x) \tag{3.18}$$

для $0 < y < x$. Очевидно, $\rho(x) \uparrow \infty$ м.н. та

$$\rho(x-y) \ge \rho(x) - \rho'(x-y, y) \quad \text{м.н.} \tag{3.19}$$

з ρ' визначеним як в (3.13), звідси випливає

$$\frac{\rho(x-y)}{\rho(x)} \overset{P}{\to} 1, \quad x \to \infty. \tag{3.20}$$

Використовуючи закон великих чисел, отримаємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{\rho(x)} 1_{\{\eta_j > y\}}}{\rho(x)} = \mathbb{P}\{\eta > y\} \quad \text{м.н.}$$

Розділивши (3.18) на $\rho(x)$ та спрямовуючи $x \to \infty$, а потім $y \to \infty$, отримуємо першу частину леми.

У подальшому ми пишемо $\int_a^b$ при $b < \infty$, маючи на увазі $\int_{[a,b]}$. Для доведення другої частини, розглянемо представлення

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_1^\infty (1 - e^{-x/y}) \mathrm{d}\, N(\ln y) \\ &= \int_0^x N(\ln x - \ln y) e^{-y} \mathrm{d}y - (1 - e^{-x}) N(0). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Оскільки величина $N(x)$ є м.н. неспадною по x, маємо для довільного $a < x$,

$$\int_0^x N(\ln x - \ln y) e^{-y} \mathrm{d}y \geq \int_0^a N(\ln x - \ln y) e^{-y} \mathrm{d}y \geq N(\ln x - \ln a)(1 - e^{-a}).$$

Розділивши цю нерівність на $\rho(\ln x)$, спрямовуючи $x \to \infty$, використовуючи (3.20) та вже доведену частину леми, маємо, переходячи до границі при $a \to \infty$, половину потрібного результату.

Інша частина отримується з такого співвідношення:

$$\begin{aligned} \int_0^x N(\ln x - \ln y) e^{-y} \mathrm{d}y &\leq \rho(\ln x)(1 - e^{-x}) \qquad (3.22) \\ &+ \int_0^1 (\rho(\ln x - \ln y) - \rho(\ln x)) e^{-y} \mathrm{d}y, \quad \text{м.н.} \end{aligned}$$

де були використані співвідношення (3.13), нерівність $N(x) \leq \rho(x)$ м.н., та той факт, що величина $\rho(y)$ є м.н. неспадною по y. Згідно з (3.14),

$$\mathbb{E} \int_0^1 (\rho(\ln x - \ln y) - \rho(\ln x)) e^{-y} \mathrm{d}y \leq \int_0^1 (C_1 |\ln y| + C_2) e^{-y} \mathrm{d}y < \infty.$$

Ділення (3.22) на $\rho(\ln x)$ та граничний перехід $x \to \infty$ завершують доведення. $\square$

Випадок ненульового центрування.

Позначимо функцію розподілу η через $F(x)$ та функцію відновлення для $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ через $U(x)$.

Наведена нижче лема стверджує, що основний вклад у зміну $N(x)$ дає процес дробового ефекту $(M(x))_{x\geq 0}$, де

$$M(x) := \sum_{k=0}^{\rho(x)-1} F(x-S_k), \quad x \geq 0.$$

Лема 31. *Маємо*

$$\mathbb{E}\Big(N(x)-M(x)\Big)^2 = \int_0^x F(x-y)(1-F(x-y))\mathrm{d}\,U(y),$$

з чого випливає що, при $x\to\infty$,

$$\mathbb{E}\Big(N(x)-M(x)\Big)^2 \;=\; O\Big(\int_0^x (1-F(y))\mathrm{d}y\Big) = o(x). \tag{3.23}$$

Доведення. Для натуральних $i<j$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(1_{\{S_i\leq x\}}(1_{\{S_i+\eta_{i+1}\leq x\}}-F(x-S_i))\times \\
&\times\;\; 1_{\{S_j\leq x\}}(1_{\{S_j+\eta_{j+1}\leq x\}}-F(x-S_j))\Big|(\xi_k,\eta_k)_{k=1}^j\Big) \\
&=\;\; 1_{\{S_i\leq x\}}(1_{\{S_i+\eta_{i+1}\leq x\}}-F(x-S_i))1_{\{S_j\leq x\}}(F(x-S_j)-F(x-S_j))=0.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(N(x)-M(x)\Big)^2 &= \mathbb{E}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}1_{\{S_k\leq x\}}\Big(1_{\{S_k+\eta_{k+1}\leq x\}}-F(x-S_k)\Big)\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty}1_{\{S_k\leq x\}}\Big(1_{\{S_k+\eta_{k+1}\leq x\}}-F(x-S_k)\Big)^2 \\
&= \mathbb{E}\sum_{k=0}^{\infty}1_{\{S_k\leq x\}}\Big(F(x-S_k)-F^2(x-S_k)\Big) \\
&= \int_0^x F(x-y)(1-F(x-y))\mathrm{d}\,U(y).
\end{aligned}$$

Якщо $\mathbb{E}\eta<\infty$, то за ключовою теоремою відновлення, при $x\to\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\mathbb{E}\Big(N(x)-M(x)\Big)^2 \;=\; a^{-1}\int_0^{\infty}F(y)(1-F(y))\mathrm{d}y<\infty,$$

де константа $a:=\mathbb{E}\xi$ може бути скінченною або нескінченною.

Якщо $\mathbb{E}\eta = \infty$ та $a < \infty$, то узагальнення ключової теореми відновлення (теорема Сгібнева [119, Теорема 4]) дає

$$\mathbb{E}\Big(N(x) - M(x)\Big)^2 \;\sim\; a^{-1}\int_0^x (1 - F(y))\mathrm{d}y.$$

Якщо $\mathbb{E}\eta = \infty$ та $a = \infty$, то модифікація теореми Сгібнева дає

$$\mathbb{E}\Big(N(x) - M(x)\Big)^2 \;=\; o\Big(\int_0^x (1 - F(y))\mathrm{d}y\Big).$$

Отже, співвідношення (3.23) справедливе у всіх випадках. □

Теорема 32. *Якщо для деякої випадкової величини Z*

$$\frac{\rho(x) - g(x)}{f(x)} \;\xrightarrow{d}\; Z, \quad x \to \infty, \tag{3.24}$$

то

$$\frac{M(x) - \int_0^x g(x-y)\mathrm{d}\,F(y)}{f(x)} \;\xrightarrow{d}\; Z, \quad x \to \infty, \tag{3.25}$$

$$\frac{N(x) - \int_0^x g(x-y)\mathrm{d}\,F(y)}{f(x)} \;\xrightarrow{d}\; Z, \quad x \to \infty, \tag{3.26}$$

та

$$\frac{R(x) - \int_0^{\ln x} g(\ln x - y)\mathrm{d}\,F(y)}{f(\ln x)} \;\xrightarrow{d}\; Z, \quad x \to \infty. \tag{3.27}$$

Доведення. Інтегруючи частинами, отримаємо

$$M(x) = \int_0^x F(x-y)\mathrm{d}\rho(y) = -F(x) + \int_0^x \rho(x-y)\mathrm{d}F(y),$$

тому для доведення (3.25) достатньо показати, що при $x \to \infty$,

$$T(x) := \int_0^x \frac{\rho(x-y) - g(x-y)}{f(x)}\,\mathrm{d}F(y) \;\xrightarrow{d}\; Z.$$

Для довільного фіксованого $\delta \in (0, x)$ можна розкласти $T(x) =: T_1(x) + T_2(x)$, де

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \int_0^\delta \frac{\rho(x-y) - g(x-y)}{f(x)}\,\mathrm{d}F(y), \\ T_2(x) &= \int_\delta^x \frac{\rho(x-y) - g(x-y)}{f(x)}\,\mathrm{d}F(y). \end{aligned}$$

З доведення леми 28 випливає, що не зменшуючи загальності, можна вважати функцію $g(x)$ неспадною. Тому, майже напевно,

$$\begin{aligned}\frac{\rho(x)-g(x)}{f(x)}F(\delta) &- \frac{\rho(x)-\rho(x-\delta)}{f(x)}F(\delta) \\ &\le T_1(x) \\ &\le \frac{\rho(x)-g(x)}{f(x)}F(\delta)+\frac{g(x)-g(x-\delta)}{f(x)}F(\delta).\end{aligned}$$

З огляду на (3.13) та (3.15), маємо збіжність $\lim\limits_{\delta\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}T_1(x)=Z$ за розподілом.

Для $x>0$ покладемо

$$Z_x(t):=\frac{\rho(tx)-g(tx)}{f(x)},\quad t\ge 0$$

та

$$\mathcal{Z}_x:=(Z_x(t):t\ge 0).$$

Нижче буде доведено, що

$$\frac{\sup\limits_{y\in[0,x]}(\rho(y)-g(y))}{f(x)}=\sup_{t\in[0,1]}Z_x(t)\overset{d}{\to}\sup_{t\in[0,1]}Z(t),\quad x\to\infty, \tag{3.28}$$

та, аналогічно,

$$\frac{\inf\limits_{y\in[0,x]}(\rho(y)-g(y))}{f(x)}=\inf_{t\in[0,1]}Z_x(t)\overset{d}{\to}\inf_{t\in[0,1]}Z(t),\quad x\to\infty. \tag{3.29}$$

Випадок 1: $g(x)=x/\mathbb{E}\xi$. Тоді Z – це α-стійка випадкова величина для деякого $\alpha\in(1,2]$ (див. [55, Твердження A.1]. Введемо стійкий процес Леві $\mathcal{Z}=(Z(t):t\ge 0)$, такий що $Z(1)\overset{d}{=}Z$. Розглянемо $\mathcal{Z}_x$ та $\mathcal{Z}$ як випадкові елементи простору Скорохода $D[0,\infty)$ з M_1-топологією.

Згідно з [25, Теорема 1b],

$$\mathcal{Z}_x\Rightarrow\mathcal{Z},\quad x\to\infty. \tag{3.30}$$

Оскільки супремум функціонал є M_1-неперервним, отримуємо (3.28) та (3.29) з теореми про неперервне відображення.

Випадок 2: $g(x)\ne x/\mathbb{E}\xi$. Тоді Z – це 1-стійка випадкова величина. Покладемо $\mathcal{Z}=(Z(t):t\ge 0)$, де

$$Z(t)=Z_1(t)-t\ln t,\quad t\ge 0,$$

та $(Z_1(t) : t \geq 0)$ є стійким процесом Леві для якого $Z_1(1) \stackrel{d}{=} Z$. У таких позначеннях ми отримаємо (3.30), використовуючи [35, Теорема 2]. Співвідношення (3.28) та (3.29) випливають з (3.30) та теореми про неперервне відображення.

Залишилось оцінити

$$\begin{aligned} \frac{\inf\limits_{y\in[0,x]}(\rho(y)-g(y))}{f(x)}(F(x)-F(\delta)) &\leq \frac{\inf\limits_{y\in[0,x-\delta]}(\rho(y)-g(y))}{f(x)}(F(x)-F(\delta)) \\ &\leq T_2(x) \\ &\leq \frac{\sup\limits_{y\in[0,x]}(\rho(y)-g(y))}{f(x)}(F(x)-F(\delta)) \\ &\leq \frac{\sup\limits_{y\in[0,x]}(\rho(y)-g(y))}{f(x)}(F(x)-F(\delta)). \end{aligned}$$

Враховуючи (3.28) та (3.29), отримаємо $\lim\limits_{\delta\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} T_2(x) = 0$ за ймовірністю. Доведення (3.25) завершене.

З огляду на (3.23), $\mathbb{E}(M(x)-N(x))^2 = o(x)$. Оскільки $f^2(x)$ зростає не повільніше за x (див. зауваження (27)), то

$$\frac{N(x)-M(x)}{f(x)} \stackrel{P}{\to} 0, \quad x \to \infty.$$

Отже, (3.26) випливає з (3.25).

Залишилось довести (3.27). Для $x > 1$ введемо величини

$$Q_1(x) := \int_1^x e^{-y}(N(\ln x) - N(\ln x - \ln y))\mathrm{d}y \geq 0,$$

$$Q_2(x) := \int_0^1 e^{-y}(N(\ln x - \ln y) - N(\ln x))\mathrm{d}y \geq 0.$$

Використовуючи рівності

$$\mathbb{E}N(x) = \int_0^x F(x-y)\mathrm{d}\,U(y) = -F(x) + \int_0^x U(x-y)\mathrm{d}\,F(y)$$

та (3.14), робимо висновок, що для $y \in (1, x)$,

$$\mathbb{E}N(\ln x) - \mathbb{E}N(\ln x - \ln y) \leq C_1(1+F(0))\ln y + C_2(1+F(0)).$$

Отже, $\mathbb{E}Q_1(x) = O(1)$ при $x \to \infty$, тому $\frac{Q_1(x)}{f(\ln x)} \stackrel{P}{\to} 0$. Аналогічно, $\frac{Q_2(x)}{f(\ln x)} \stackrel{P}{\to} 0$. Тому, використовуючи (3.21), маємо

$$\frac{Q_1(x)-Q_2(x)}{f(\ln x)} = \frac{(1-e^{-x})N(\ln x) - R(x) - (1-e^{-x})N(0)}{f(\ln x)} \stackrel{P}{\to} 0,$$

при $x \to \infty$. З нерівності $N(x) \le \rho(x)$ м.н. та слабкого закону великих чисел для ρ випливає, що $N(\ln x)$ зростає за ймовірністю не швидше за $\ln x$. З цього випливає

$$\frac{N(\ln x) - R(x)}{f(\ln x)} \overset{P}{\to} 0, \quad x \to \infty.$$

Використання (3.26) завершує доведення. □

3.3.2. Доведення теореми 23. Покладемо

$$S_0^* := 0 \text{ та } S_k^* := |\ln W_1| + \ldots + |\ln W_k|, \quad k \in \mathbb{N},$$

та

$$T_k^* := S_{k-1}^* + |\ln(1 - W_k)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $(T_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ є збуреним випадковим блуканням. Теорема 29 (випадок $g = 0$) та теорема 32 (випадок $g \neq 0$), застосовані до процесів

$$\rho^*(x) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k^* > x\}, \quad N^*(\ln x) := \#\{k \in \mathbb{N} : T_k^* \le \ln x\},$$

доводять теорему 23 для $N^*(\ln n)$. Доведення твердження для K_n базується на пуассонізації.

Крок 1. Перевіримо, що

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\,\mathbb{D}(K(t)|(P_k)) = \frac{\ln 2}{\mu}, \tag{3.31}$$

де права частина дорівнює 0 при $\mu = \infty$. Очевидно, з цього буде випливати

$$\frac{K(t) - \mathbb{E}(K(t)|(P_k))}{q(t)} \overset{P}{\to} 0, \tag{3.32}$$

для довільної $q(t)$, такої що $\lim_{t\to\infty} q(t) = \infty$.

Згідно з [78, формула (25)],

$$\mathbb{D}(K(t)|(P_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-tP_k} - e^{-2tP_k}\right).$$

Покладемо $U^*(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_k^* \le x\}$ та $\varphi(t) := \mathbb{E}e^{-t(1-W)}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\mathbb{D}(K(t)|(P_k)) &= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\varphi(te^{-S_{k-1}^*}) - \varphi(2te^{-S_{k-1}^*})\Big) \\ &= \int_0^{\infty}\Big(\varphi(te^{-x}) - \varphi(2te^{-x})\Big)\mathrm{d}U^*(x), \end{aligned}$$

що еквівалентно

$$\mathbb{E}\,\mathbb{D}(K(e^x)|(W_k)) = \int_0^\infty A(x-y)\mathrm{d}U^*(x). \tag{3.33}$$

для $A(t) := \varphi(e^t) - \varphi(2e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Той факт, що

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z(1-W)} - e^{-2z(1-W)}}{z}\mathrm{d}z = \ln 2,$$

гарантує, що $A(t)$ інтегровна, оскільки за теоремою Фубіні,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} A(t)\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \frac{\varphi(z)-\varphi(2z)}{z}\mathrm{d}z \\ &= \mathbb{E}\int_0^\infty \frac{e^{-z(1-W)} - e^{-2z(1-W)}}{z}\mathrm{d}z = \ln 2.\end{aligned}$$

Міркуючи так, як це зроблено у [55, Розділ 5], можна довести, що $A(t)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом. Застосовуючи ключову теорему відновлення на $\mathbb{R}$ до (3.33), отримуємо (3.31).

З нерівності Чебишева та формули (3.31) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\{|K(t) - \mathbb{E}(K(t)|(P_k))| > \varepsilon q(t)|(P_k)\} = 0 \ \text{ за ймовірністю.}$$

Взявши математичне сподівання та використавши теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримаємо (3.32).

Крок 2. З кроку 1 випливає, що $\frac{K(t)-g(t)}{f(t)}$ слабко збігається до власного невиродженого розподілу тоді і лише тоді, коли слабко збігається $\frac{\mathbb{E}(K(t)|(P_k))-g(t)}{f(t)} = \frac{R^*(t)-g(t)}{f(t)}$ до того самого розподілу.

Це спостереження, теорема 29 (у випадку $g = 0$) та формула (3.27) теореми 32 (у випадку $g \neq 0$) гарантують, що із слабкої збіжності $\frac{\rho^*(x)-g(x)}{f(x)}$ до деякого розподілу θ, випливає слабка збіжність

$$\frac{R^*(t) - \int_0^{\ln t} g(\ln t - y)\,\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \in \mathrm{d}y\}}{f(\ln t)}$$

та

$$\frac{K(t) - \int_0^{\ln t} g(\ln t - y)\,\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \in \mathrm{d}y\}}{f(\ln t)}$$

до θ.

Крок 3. Залишилось провести процес депуассонізації. З огляду на (3.16),

$$b(t) := \int_0^{\ln t} g(\ln t - y)\, \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \in \mathrm{d}y\}$$

задовольняє

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b(t) - b([t(1\pm\varepsilon)])}{f(\ln t)} = 0,$$

для довільного $\varepsilon > 0$, оскільки $f(\ln t)$ повільно змінюється (див. зауваження (27)), то

$$X_{\pm}(t) := \frac{K(t) - b(\lfloor t(1\pm\varepsilon)\rfloor)}{f(\ln(\lfloor t(1\pm\varepsilon)\rfloor))} \ \Rightarrow\ \theta.$$

Нехай C_t – це така подія: число точок, кинутих до моменту часу t, лежить в межах від $\lfloor(1-\varepsilon)t\rfloor$ до $\lfloor(1+\varepsilon)t\rfloor$. З монотонності K_n отримуємо

$$\begin{aligned} X_{-}(t) &\geq X_{-}(t) 1_{C_t} \\ &\geq \frac{K_{\lfloor(1-\varepsilon)t\rfloor} - b(\lfloor t(1-\varepsilon)\rfloor)}{f(\ln(\lfloor t(1-\varepsilon)\rfloor))} 1_{C_t}. \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbb{P}(C_t) \to 1$, робимо висновок, що

$$\theta(x,\infty) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{K_n - b(n)}{f(\ln n)} > x\right\},$$

для довільного $x \geq 0$. Протилежна нерівність для нижньої границі випливає з аналогічних міркувань та того, що

$$X_{+}(t) 1_{(C_t)^c} \ \overset{P}{\to}\ 0.$$

Доведення теореми 23 завершено.

Зауваження 33. Наведена нижче лема доводить співвідношення (3.11). Використовується термінологія, введена перед формулюванням леми 28.

Лема 34. *Співвідношення* (3.11) *є властивістю класу f-еквівалентних функцій g.*

Доведення. Припустимо, що g задовольняє (3.11). Ми повинні показати, що для довільної g_1, такої що $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)-g_1(x)}{f(x)} = 0$, співвідношення (3.11) теж виконується.

Очевидно, достатньо довести, що

$$A(x) := \frac{\int_0^x (g(x-y) - g_1(x-y))\mathrm{d}\, F(y)}{f(x)} \ \to 0, \quad x \to \infty. \tag{3.34}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує $x_0 > 0$ такий, що для всіх $x > x_0$ $\frac{|g(x)-g_1(x)|}{f(x)} < \varepsilon$. Оскільки f правильно змінується з параметром $\beta \in [1/2, 1]$ (див. зауваження 27), то, не зменшуючи загальності, можна вважати f неспадною. Отже,

$$\begin{aligned} |A(x)| &\leq \int_0^{x-x_0} \frac{|g(x-y)-g_1(x-y)|}{f(x-y)} \mathrm{d}\, F(y) \\ &+ \int_{x-x_0}^{x} \frac{|g(x-y)-g_1(x-y)|}{f(x-y)} \mathrm{d}\, F(y) \\ &\leq \varepsilon + \sup_{y\in[0,x_0]} \frac{|g(y)-g_1(y)|}{f(y)} (F(x)-F(x-x_0)). \end{aligned}$$

Спрямовуючи $x \to \infty$, а потім $\varepsilon \downarrow 0$ отримуємо (3.34). □

Якщо розподіл $|\ln W|$ належить області притягання α-стійкого розподілу з $\alpha \in (1, 2]$, то $(\rho(x) - g(x))/f(x)$ слабко збігається з $g(x) = x/\mu$ та підхожою $f(x)$. Така функція g, очевидно, задовольняє (3.11), що, за лемою 34, тягне за собою, що для довільної g_1 з класу f-еквівалентності виконується (3.11).

Якщо розподіл $|\ln W|$ належить області притягання 1-стійкого розподілу, то $(\rho(x) - g(x))/f(x)$ слабко збігається з $g(x) = \frac{x}{m(r(x/m(x)))}$ та $f(x) = \frac{r(x/m(x))}{m(x)}$, з m та r, визначеними як в частині (d) теореми 24. Оскільки r правильно змінюється з параметром 1, то ми можемо припустити, що функція g є диференційовною. Оскільки $\frac{g(x)}{xf(x)}$ правильно змінюється з параметром (-1), то вона збігається до 0, при $x \to \infty$. Окрім цього, $\lim_{x\to\infty} x\mathbb{P}\{\zeta > x\} = 0$, оскільки $\nu < \infty$, де ми позначили $|\ln(1 - W)|$ через ζ. Отже,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)\mathbb{P}\{\zeta > x\}}{f(x)} = 0,$$

тому достатньо перевірити, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{E}(g(x) - g(x-\zeta))1_{\{\zeta\leq x\}}}{f(x)} = 0. \tag{3.35}$$

Використовуючи субадитивність та диференційовність g, можна показати, що

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|, \quad x, y > 0,$$

де $K := 1/m(r(1))$. З цього одразу випливає (3.35) та твердження загалом за лемою 34.

3.4. Число порожніх інтервалів

Окрім K_n, цікавими є й інші функціонали на гратці Бернуллі, зокрема вже згадані M_n, L_n, а також

- $K_{n,r}$ – число інтервалів в яких міститься рівно r рівномірних точок;
- Z_n – число рівномірних точок в останньому зайнятому інтевалі.

Результати по слабкій асимптотичній поведінці для M_n та Z_n у повній загальності встановлено у [55]. За припущення $\mu < \infty$ слабка збіжність вектора $(K_{n,1}, \ldots, K_{n,r})$ до деякого невиродженого розподілу доведена у [56]. Асимптотику $K_{n,r}$ у випадку $\mu = \infty$ буде знайдено у підрозділі 3.5. цього розділу.

Метою цього підрозділу є дослідження асимптотичної поведінки $\mathbb{E}L_n$ (теорема 35), що виявилось цікавою аналітичною задачею.

Незважаючи на те, що відома явна формула для $\mathbb{E}L_n$ (див. [55, стор. 16])

$$\mathbb{E}L_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1 - \mathbb{E}(1-W)^k}{1 - \mathbb{E}W^k}, \tag{3.36}$$

отримати асимптотику $\mathbb{E}L_n$, використовуючи її, невдається без додаткових припущень. Також ми доведемо, що розподіл L_n є геометричним з параметром 1/2, якщо $W \overset{d}{=} 1 - W$ (Твердження 36).

3.4.1. Основні результати.

Теорема 35. *Математичне сподівання $\mathbb{E}L_n$ задовольняє таким асимптотичним співвідношенням:*

(i) Якщо $\mu = \infty$ та $\nu = \infty$, то

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}W^n}{\mathbb{E}(1-W)^n} \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}W^n}{\mathbb{E}(1-W)^n}.$$

Зокрема, якщо $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}W^n}{\mathbb{E}(1-W)^n} = \gamma_0 \in [0, \infty]$, *то* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n = \gamma_0$.

(ii) Якщо $\nu < \infty$ та $\mu \le \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}L_n = \nu/\mu.$$

(iii) Якщо $\mu < \infty$ та $\nu = \infty$, то

$$\mathbb{E}L_n \sim \frac{1}{\mu}\int_1^n \frac{\mathbb{E}e^{-y(1-W)}}{y}\mathrm{d}y.$$

Доведення. (i): Покладемо $s_m = \frac{\mathbb{E}W^m}{\mathbb{E}(1-W)^m}$. Має місце така рівність

$$\mathbb{P}\{Z_n = m\} = g_{n,m}\mathbb{P}\{Q_m(1) = 0\} = g_{n,m}\frac{\mathbb{E}(1-W)^m}{1-\mathbb{E}W^m}, \quad m \in \mathbb{N}, m \le n,$$

з якої випливає представлення

$$\mathbb{E}L_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{\mathbb{E}W^m}{\mathbb{E}(1-W)^m} g_{n,m}\frac{\mathbb{E}(1-W)^m}{1-\mathbb{E}W^m} = \mathbb{E}s_{Z_n}. \tag{3.37}$$

Масив чисел $c_{n,m} := \mathbb{P}\{Z_n = m\}$ задовольняє всім умовам леми 37. Зокрема, з (3.6) та припущення $\mu = \infty$ випливає $\lim_{n\to\infty} c_{n,m} = 0$. Отже, перше твердження частини (i) випливає з вказаної леми з $t_n = \mathbb{E}L_n$. Якщо γ_0 визначене, твердження випливає з (3.37), розбіжності Z_n (нагадаємо, що $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{Z_n = m\} = 0$) та використання теореми Лебега про мажоровну збіжність (у випадку $\gamma_0 < \infty$) або леми Фату (у випадку $\gamma_0 = \infty$).

Доведення пункту (ii) міститься у [55] та [56].

(iii): Ми використовуємо пуассонізовану версію гратки Бернуллі, яка описана на стр. 71. Зокрема, пуассонізована версія L_n позначається $L(t)$. Нехай $\pi_t^{(k)}$ – це число куль в k-му інтервалі, тоді $\pi_t = \sum_{k\ge 1}\pi_t^{(k)}$. З цього випливає, що при фіксованих (W_j), $(\pi_t^{(k)})_{t\ge 0}$ є пуассонівським процесом з інтенсивністю $P_k = W_1 \ldots W_{k-1}(1-W_k)$ і ці процеси незалежні для різних інтервалів, як звуження процесу Пуассона на множини, що не перетинаються. З представлення

$$L(t) = \sum_{k\ge 1} 1_{\{\pi_t^{(k)}=0,\ \sum_{j\ge k+1}\pi_t^{(j)}\ge 1\}}$$

ми отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L(t)|(W_k)) &= \sum_{k\ge 1} e^{-tP_k}(1 - e^{-t(1-P_1-\ldots-P_k)}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-tW_1\cdot\ldots\cdot W_{k-1}(1-W_k)} - e^{-tW_1\cdot\ldots\cdot W_{k-1}}\right).\end{aligned}$$

Нагадаємо, що

$$\rho(x) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > x\}, \quad x \geq 0,$$

де $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ – це випадкове блукання з кроком $|\ln W|$. Покладемо $\varphi(x) := \mathbb{E}e^{-x(1-W)}$ та

$$U(x) := \mathbb{E}\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_k \leq x\}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}L(t) &= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\varphi(te^{-S_{k-1}}) - \exp(-te^{-S_{k-1}})\Big) \\ &= \int_0^{\infty}\Big(\varphi(te^{-x}) - \exp(-te^{-x})\Big)U(\mathrm{d}x) \qquad (3.38) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\frac{(1-\mathbb{E}(1-W)^k)}{1-\mathbb{E}W^k}, \qquad (3.39) \end{aligned}$$

де було використано формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}U(\mathrm{d}x) = \frac{1}{1-\mathbb{E}W^s}, \quad s > 0,$$

для перетворення Лапласа функції відновлення. Формула (3.39) є очевидним аналогом (3.36).

Покладемо $B(x) = \varphi(e^x) - \exp(-e^x)$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\nu = \infty$ та

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z(1-W)} - e^{-z}}{z}\mathrm{d}z = |\ln(1-W)|,$$

ми робимо висновок

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} B(z)\mathrm{d}z = \infty. \qquad (3.40)$$

Застосовуючи просте узагальнення теореми Сгібнева [119, Теорема 5] до формули

$$\mathbb{E}L(e^t) = \int_0^{\infty} B(t-x)U(\mathrm{d}x), \qquad (3.41)$$

отримаємо

$$\mathbb{E}L(e^t) \sim \frac{1}{\mu}\int_0^t \varphi(e^x)\mathrm{d}x \sim \frac{1}{\mu}\int_1^{e^t}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad t \to \infty.$$

Асимптотику $\mathbb{E}L_n$ тепер можна отримати з леми про депуассонізацію 38. вона може бути застосована оскільки $\mathbb{E}L(t)$ повільно змінюється. Дійсно, повільна зміна $\int_1^t \varphi(u)\mathrm{d}u/u$ випливає безпосередньо з того що $\varphi(t) \downarrow 0$ та розбіжності інтегралу при $t = \infty$. $\square$

У випадку $\nu < \infty$ відомо, що L_n збігається за розподілом до деякої власної в.в. [55, Теорема 2.2]. Проте цей результат дає лише неявний вигляд граничного розподілу через розподіли дограничних величин L_n, які в згальному випадку важко обчислити, за одним цікавим виключенням. З рекурсивної структури гратки Бернуллі випливає, що в.в. L_1 завжди має геометричний розподіл з параметром $\mathbb{E}W$. Цікаво, що це виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, якщо розподіл в.в. W симетричний відносно точки $1/2$.

Твердження 36. *Якщо $W \overset{d}{=} 1 - W$, то L_n має геометричний розподіл з параметром $1/2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Доведення базується на рекурсії (3.5) для одновимірних розподілів величин L_n. З симетрії $W =_d 1 - W$ випливає $\mathbb{E}W^k = \mathbb{E}(1-W)^k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ та

$$\mathbb{P}\{Q_n^*(1) = n\} = \mathbb{P}\{Q_n^*(1) = 0\}, \tag{3.42}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Індукцією по n ми покажемо, що $\mathbb{P}\{L_n = k\} = 2^{-k-1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$. Використавши (3.5) та (3.42), отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{L_n = 0\} &= \mathbb{P}\{Q_n^*(1) = 0\} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\{L_k = 0\}\mathbb{P}\{Q_n^*(1) = k\} \\
&= \mathbb{P}\{Q_n^*(1) = 0\} + \frac{1}{2}\Big(1 - 2\mathbb{P}\{Q_n^*(1) = 0\}\Big) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

за припущенням індукції. Припустивши, що $\mathbb{P}\{L_n = i\} = 2^{-i-1}$ для всіх $i < k$, отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{L_n = k\} &= \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\{Q_n^*(1) = j\}\mathbb{P}\{L_j = k\} \\
&+ \mathbb{P}\{Q_n^*(1) = n\}\mathbb{P}\{L_n = k-1\} \\
&= 2^{-k-1}\Big(1 - 2\mathbb{P}\{Q_n^*(1) = 0\}\Big) \\
&+ \mathbb{P}\{Q_n^*(1) = 0\}2^{-k} = 2^{-k-1},
\end{aligned}$$

що завершує доведення. $\square$

Альтернативний шлях доведення останнього твердження полягає у використанні представлення L_n через часи перебування ланцюга Маркова Q_n^* в додатних станах. Дійсно, згадавши що L_1 має геометричний розподіл з параметром $\mathbb{E}W$ та використавши (3.42) та індукцію, можна показати, що розподіл L_n не залежить від $n \in \mathbb{N}$.

3.4.2. Допоміжні результати. Для зручності посилань ми сформулюємо відомий результат Тьопліца та Шура (див. [66], теорема 2 на стр. 43 та теорема 9 на стр. 52) у зручній для нас формі.

Лема 37. *Нехай* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *– це довільна послідовність дійсних чисел,* $(c_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ *– невід'ємний масив. Визначимо послідовність* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *так* $t_n = \sum_{m=1}^{n} c_{n,m} s_m$. *Якщо*

(i) $\lim_{n\to\infty} c_{n,m} = 0$ *для всіх* m,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} c_{n,m} = 1$,

то

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \le \liminf_{n\to\infty} t_n \le \limsup_{n\to\infty} t_n \le \limsup_{n\to\infty} s_n \le +\infty.$$

Наведена нижче лема про депауссонізацію була використана при доведенні теореми 35.

Лема 38. *Якщо* $\mathbb{E}L(t)$ *повільно змінюється та* $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}L(t) = c \in (0, +\infty]$, *то* $\mathbb{E}L_n \sim \mathbb{E}L(n)$, *при* $n \to \infty$.

Доведення. Для довільного фіксованого $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}L(t) \;=\; \mathbb{E}L(t)1_{\{|\Pi_t - t| > \epsilon t\}} + \mathbb{E}L(t)1_{\{|\Pi_t - t| \le \epsilon t\}} =: A(t) + B(t).$$

Сублінійність $\mathbb{E}L(t)$ та елементарний результат про великі відхилення для розподілу Пуассона (див. [14]) дають таку оцінку

$$\mathbb{P}\{|\Pi_t - t| > \epsilon t\} < c_1 e^{-c_2 t},\ t > 0, \tag{3.43}$$

для деяких $c_1, c_2 > 0$, тому $A(t) \to 0$, при $t \to \infty$.

Оцінимо $B(t)$. Оскільки M_n та K_n неспадають по n, то

$$B(t) = \mathbb{E}(M(t) - K(t))1_{\{|\Pi_t - t| \le \varepsilon t\}} \le \mathbb{E}L_{[(1-\varepsilon)t]} + \mathbb{E}(M_{[(1+\varepsilon)t]} - M_{[(1-\varepsilon)t]}).$$

Аналогічно $B(t) \geq \mathbb{E}L_{[(1+\varepsilon)t]} - \mathbb{E}(M_{[(1+\varepsilon)t]} - M_{[(1-\varepsilon)t]})$. Спочатку доведемо, що

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(M_{[(1+\varepsilon)n]} - M_n) = 0. \tag{3.44}$$

Поклавши $T_n = \max(E_1,\dots,E_n)$ та використавши субадитивність $U(\cdot)$, отримаємо

$$\begin{aligned} D(n) &:= \mathbb{E}\Big(M_{[(1+\varepsilon)n]} - M_n\Big) = \mathbb{E}\Big(U(T_{[(1+\varepsilon)n]}) - U(T_n)\Big) \\ &\leq \mathbb{E}U(T_{[(1+\varepsilon)n]} - T_n)1_{\{T_{[(1+\varepsilon)n]} > T_n\}}. \end{aligned}$$

Оцінка $U(x) < ax + b$ (з деякими $a, b > 0$) дає

$$\begin{aligned} D(n) &\leq \mathbb{E}\Big(a(T_{[(1+\varepsilon)n]} - T_n) + b\Big)1_{\{T_{[(1+\varepsilon)n]} > T_n\}} \\ &\leq a(H_{[(1+\varepsilon)n]} - H_n) + b\mathbb{P}\{T_{[(1+\varepsilon)n]} > T_n\}, \end{aligned}$$

де була використана рівність $\mathbb{E}T_n = H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Оскільки

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}(H_{[(1+\varepsilon)n]} - H_n) = 0,$$

та

$$\mathbb{P}\{T_{[(1+\varepsilon)n]} > T_n\} = 1 - \frac{n}{[(1+\varepsilon)n]} \to (1+\varepsilon)^{-1}\varepsilon,$$

при $n \to \infty$, ми отримуємо твердження (3.44).

Розділивши нерівність

$$\mathbb{E}L(n/(1-\varepsilon)) \leq A(n/(1-\varepsilon)) + \mathbb{E}L_n + \mathbb{E}(M_{[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}n]} - M_n),$$

на $\mathbb{E}L(n)$ та спрямувавши спочатку $n \to \infty$, а потім $\varepsilon \to 0$ та використавши повільну зміну $\mathbb{E}L(n)$, отримуємо $\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}L_n}{\mathbb{E}L(n)} \geq 1$. Верхня оцінка випливає з аналогічних міркувань та нерівності

$$\mathbb{E}L(n/(1+\varepsilon)) \geq \mathbb{E}L_n - \mathbb{E}(M_n - M_{[\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}n]}).$$

У випадку $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}L(t) = \infty$ лема доведена. Випадок скінченої границі доводиться аналогічно. □

3.5. Малі частки

Нагадаємо, що $K_{n,r}$ – це число інтервалів у гратці Бернуллі, які містять рівно r куль, де $r \in \mathbb{N}$, $r \le n$. Твердження 40, наведене нижче доповнює відомі результати (див. [56]) про слабку збіжність $K_{n,r}$.

Нехай $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – це деякий розподіл ймовірностей. У класичній схемі зайнятосіті з n кулями та нескінченним масивом урн $k = 1, 2, \dots$ з частотами p_k, середнє число $\varkappa_{n,r}$ урн, які містять рівно r з n куль рівне

$$\varkappa_{n,r} = \binom{n}{r} \sum_{j\ge 1} p_j^r (1-p_j)^{n-r}, \quad 1 \le r \le n. \tag{3.45}$$

Лема 39. *Для фіксованих $r < s$ існує константа c, така що*

$$\varkappa_{n,r} \ge c\, \varkappa_{2n,s}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.46}$$

Доведення. Використавши нерівність $(1-x)^{-1} \ge e^x$ при $x \in (0,1)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}}{\binom{2n}{s} x^s (1-x)^{2n-s}} &\ge c_1 \frac{s!}{2^s r!} (nx)^{r-s} (1-x)^{s-r-n} \\
&\ge c_2 (nx)^{r-s} e^{nx/2} \\
&\ge c_2 \min_{y>0} y^{r-s} e^{y/2} \\
&= c_2 \left(\frac{e}{2(s-r)}\right)^{s-r}.
\end{aligned}$$

□

Цей результат поширюється на випадкові частоти (P_k), зокрема, вигляду (3.1). Цей результат використовується у доведенні твердження 40.

Твердження 40. (a) *Якщо $\mu < \infty$, то, для довільного $r \in \mathbb{N}$, вектор $(K_{n,1}, K_{n,2}, \dots, K_{n,r})$ слабко збігається при $n \to \infty$ до деякого власного багатовимірного розподілу, та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}K_{n,r} = (\mu r)^{-1}$.*

(b) *Якщо $\mu = \infty$, то, для довільного $r \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}K_{n,r} = 0$, тобто $\lim_{n\to\infty} K_{n,r} = 0$ за ймовірністю.*

Доведення. Частина (a) міститься у Теоремі 3.3 роботи [56].

Якщо ми доведемо (b) для $r = 1$, то результат для $r \geq 2$ випливатиме з леми 39. Частоти P_k у формулі (3.1) можна записати так

$$P_k = (1 - W_k) \exp(-S_{k-1}), \tag{3.47}$$

де $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ – це випадкове блукання з кроком $|\ln W|$.

З формули (3.45) випливає, що

$$\mathbb{E}(K_{n,1} | (W_k)_{k \in \mathbb{N}}) = n \sum_{j \geq 1} P_j (1 - P_j)^{n-1}.$$

Використавши нерівність $1 - x \leq e^{-x}$ для $x \in [0, 1]$, рівність (3.47) та замінивши n на e^z, ми зводимо задачу оцінки $\mathbb{E}K_{n,1}$ до оцінки

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{j \geq 1} e^z P_j e^{-e^z P_j} &= \mathbb{E} \sum_{j \geq 1} (1 - W_j) \exp\{z - S_{j-1} - e^{z - S_{j-1}} (1 - W_j)\} \\ &= \int_0^\infty f(z - y) \mathrm{d}U(y), \end{aligned}$$

де $f(y) := \mathbb{E}\{(1 - W) \exp(y - e^y (1 - W))\}$ та $U(y) := \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}\{S_j \leq y\}$ – функція відновлення (S_j). Функція f невід'ємна та інтегровна, оскільки $\int_{-\infty}^\infty f(y) \mathrm{d}y = 1$. Функція $y \to e^{-y} f(y)$ не зростає. З останніх двох властивостей випливає, що f є безпосередньо інтегровною за Ріманом (див., наприклад, доведення наслідку 2.17 у [42]). Якщо $\mu = \infty$, застосування ключової теореми відновлення дає

$$\lim_{z \to \infty} \int_0^\infty f(z - y) U(\mathrm{d}y) = 0,$$

а тому $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}K_{n,1} = 0$. □

3.6. Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджена асимптотична поведінка деяких функціоналів на гратках Бернуллі: кількості зайнятих інтервалів; числа порожніх інтервалів з індексом, що не перевищує номер останнього зайнятого; числа малих частин. Зокрема, отримано такі результати:

- Без жодних моментних припущень встановлено слабку асимптотичну поведінку числа зайнятих інтервалів. Встановлено п'ять режимів збіжності та отримано явний вигляд центруючих та нормалізуючих послідовностей.
- Знайдено асимптотичну поведінку середнього числа порожніх інтервалів та встановлено розподіл цієї величини в симетричному випадку.
- Доповнено існуючі результати по асимптотиці малих часток.

Окрім цього в повній загальності встановлено слабку асимтпотичну поведінку числа візитів інтервалу $[0, x]$ збуреним випадковим блуканням з додатними компонентами, при $x \to \infty$.

Розділ 4

Теорія коалесцентів

4.1. Число зіткнень у бета$(2, b)$-коалесценті.

Результати по слабкій асимптотичній поведінці бета(a, b)-коалесцентів, які наведені у огляді літератури, показують, що при значеннях параметру $a = 1$ та $a = 2$ відбувається фазовий перехід при якому змінюється слабка поведінка функціоналів, що діють на них. У цьому розділі роботи буде встановлена слабка асимптотична поведінка числа зіткнень у бета(a, b)-коалесценті з параметрами $a = 2$ та $b > 0$.

4.1.1. Означення та основні властивості бета$(2, b)$-коалесцента. У даному підрозділі під бета$(2, b)$-коалесцентом ми розуміємо коалесцент з множинними зіткненнями (або Λ-коалесцент) з мірою

$$\Lambda(dx) = \frac{x(1-x)^{b-1}}{B(2,b)} 1_{(0,1)},\ b > 0.$$

До кінця цього підрозділу $\Pi(t)$ позначає бета$(2, b)$-коалесцент. Якщо це не викликатиме неоднозначності, то природне звуження $(\varrho_n \Pi(t))_{t\geq 0}$ процесу $(\Pi(t))_{t\geq 0}$ на множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ (n-коалесцент) ми також називатимемо бета$(2, b)$-коалесцентом.

У випадку бета$(2, b)$-коалесцента число зіткнень X_n, доки не залишиться єдиний блок, задовольняє випадкове рекурентне співвідношення

$$X_1 = 0,\quad X_n \overset{d}{=} 1 + X'_{n-I_n},\ n \geq 2 \tag{4.1}$$

де $n - I_n$ – це (випадкова) кількість часток після першого зіткнення, а випадкова величина I_n має розподіл (це випливає з формул (??) при вказаному виборі міри Λ)

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} \;=\; \frac{\Gamma(n-k+b-1)\Gamma(n+1)}{(k+1)\Gamma(n-k)\Gamma(n+b)\Psi(n,b)}, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}, \tag{4.2}$$

де

$$\Psi(n,b) \;:=\; \frac{b}{b+n-1} + \Psi(b+n-1) - \Psi(b) - 1$$

та $\Psi(z) = (d/dz)\ln\Gamma(z)$ – це логарифмічна похідна гамма-функції. Зауважимо, що

$$\Psi(n,b) \;=\; \ln n - \Psi(b) - 1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad n \to \infty. \tag{4.3}$$

У доведеннях нам знадобиться асимптотика повних інтенсивностей

$$g_n \;=\; \frac{\Psi(n,b)}{B(2,b)} \;\sim\; \frac{\ln n}{B(2,b)}, \quad n \to \infty. \tag{4.4}$$

Також використовується міра Леві μ_b, зосереджена на $(0,\infty)$ та визначена так

$$\mu_b(dt) \;:=\; \frac{e^{-bt}}{1-e^{-t}}\,dt, \quad t > 0, b > 0. \tag{4.5}$$

Вказана міра μ_b має моменти

$$\begin{aligned} m_r^{(b)} \;&:=\; \int_{(0,\infty)} t^r \mu_b(dt) \;=\; \int_{(0,1)} (-\ln(1-x))^r \frac{(1-x)^{b-1}}{x}\,dx \\ &=\; \Gamma(r+1)\,\zeta(r+1,b), \quad r > 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

що випливає з рівності Гурвіца (див. [6, (23.2.7)]). В цій формулі При $\mathrm{Re}(z) > 1$ $\zeta(z,b) = \sum_{i=0}^{\infty}(i+b)^{-z}$ – дзета-функція Гурвіца.

4.1.2. Основні результати. Перший результат – це асимптотична поведінка моментів.

Теорема 41. *При $n \to \infty$, для $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{E}X_n^k \;=\; \frac{1}{(2m_1)^k}\ln^{2k} n + \frac{2k((2k+1)m_2 + 6cm_1)}{3(2m_1)^{k+1}}\ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n),$$

де $m_1 := m_1^{(b)} = \zeta(2,b)$, $m_2 := m_2^{(b)} = 2\zeta(3,b)$ (див. (4.6)) та $c := -\Psi(b) - 1$. Зокрема,

$$\mathbb{E}X_n \;=\; \frac{1}{2m_1}\ln^2 n + \frac{m_2 - 2cm_1}{2m_1^2}\ln n + O(1)$$

та

$$\mathbb{E}X_n^2 \;=\; \frac{1}{4m_1^2}\ln^4 n + \frac{5m_2 - 6cm_1}{6m_1^3}\ln^3 n + O(\ln^2 n),$$

а, отже, дисперсія $\mathbb{D}X_n$ *має асимптотичний розклад*

$$\mathbb{D}X_n \;=\; \frac{m_2}{3m_1^3}\ln^3 n + O(\ln^2 n) \;=\; \frac{2\zeta(3,b)}{3\zeta^3(2,b)}\ln^3 n + O(\ln^2 n).$$

Зауваження 42. Нехай $(S_t)_{t\geq 0}$ – це субординатор з нульовим зсувом та мірою Леві (4.5). Для $n \in \mathbb{N}$ нехай Y_n (Z_n) – це кількість блоків (з більш ніж однією точкою) випадкової регенеративної структури, що виникає внаслідок кидання n незалежних між собою та незалежних від $(S_t)_{t\geq 0}$ точок з рівномірним на $[0,1]$ розподілом, на множину значень мультиплікативного субординатора $(1-e^{-S_t})_{t\geq 0}$.

Згідно з формулами (19) та (22) у [59], $\mathbb{E}Y_n$ та $\mathbb{E}Y_n^2$ мають майже ідентичні асимптотичні розклади як і $\mathbb{E}X_n$ та $\mathbb{E}X_n^2$. Відмінність лише в тому, що у нашому випадку c дорівнює $-\Psi(b)-1$, а у роботі [59] константа c дорівнює $-\Psi(b)$. Згідно з формулою (19) та теоремою 14 у [59], $\mathbb{E}Z_n$ має в точності такий же асимптотичний розклад як і $\mathbb{E}X_n$. Згідно з (24) у [59], $\mathbb{D}Y_n$ має такий же асимптотичний розклад, що і $\mathbb{D}X_n$. Ці спостереження наводять на думку, що X_n та Y_n повинні мати однакову асимптотичну поведінку.

Модель "граток Бернуллі", описана в розділі 3 є окремими випадком вказаної регенеративної структури для якої субординатор має скінченну міру Леві (є узагальненим процесом Пуассона).

Зауваження 43. Для $t \geq 0$ визначимо $(f_i(t))_{i\in\mathbb{N}}$ як послідовність (у деякому порядку) асимптотичних частот випадкового перестановного розбиття, що є значенням $\Pi(t)$. Зауважимо, що $\int_{[0,1]} x^{-1}\Lambda(dx) < \infty$ для $\Lambda = \beta(2,b)$, $b > 0$. Тому, згідно з Твердженням 26 у [102], $(\widehat{S}_t := -\ln(1-\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)))_{t\geq 0}$ є копією $(S_t)_{t\geq 0}$. Це зауваження знадобиться пізніше в доведеннях.

Наслідок з наведеної вище теореми – це посилений закон великих чисел.

Теорема 44. *При* $n \to \infty$, $X_n/\ln^2 n \to 1/(2m_1)$ *майже напевно з* m_1 *визначеним у теоремі 41.*

Основний результат розділу – центральна гранична теорема для послідовності $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 45. *При $n \to \infty$, послідовність*

$$\frac{X_n - \frac{1}{2m_1}\ln^2 n}{\sqrt{\frac{m_2}{3m_1^3}\ln^3 n}}$$

слабко збігається до стандартного нормального закону, де m_1 та m_2, визначені як у теоремі 41.

Зауваження 46. Доведення теореми 45, наведене у секції 4.1.4., базується на теорії коалесцентів та результатах з теорії випадкових перестановних розбиттів. Ми залишаємо відкритим питання про те, чи можливо отримати асимптотичну нормальність X_n з рекурсії (4.1) безпосередньо, тобто без використання потраєкторної конструкції, доступної у термінах коалесцента.

Нещодавно з'явилась робота [33] в якій автори спробували встановити результат по слабкій збіжності X_n для бета$(2,b)$-коалесцента використовуючи лише рекурсію, проте їх доведення неповне, оскільки базується на недоведеному припущенні, яке, ти не менш, здається вірним і в першому наближенні випливає з леми 4.27 даної роботи.

4.1.3. Доведення теорем 41 та 44.

Доведення теореми 41. Для $k \in \mathbb{N}$ покладемо $a_n^{(k)} := \mathbb{E}X_n^k$. Індукцією по k ми доведемо асимптотичний розклад

$$a_n^{(k)} \;=\; \alpha^k \ln^{2k} n + r_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.7}$$

де $\alpha := (2m_1)^{-1}$ та

$$r_k \;:=\; \frac{2}{3}k\alpha^{k+1}((2k+1)m_2 + 6cm_1). \tag{4.8}$$

Нагадаємо, що $m_1 = m_1^{(b)} = \zeta(2,b)$, $m_2 = m_2^{(b)} = 2\zeta(3,b)$ (див. (4.6)) та $c := -\Psi(b) - 1$.

Для $k = 1$ будемо писати a_n замість $a_n^{(1)}$ для спрощення. Згідно з (4.1), маємо

$$a_1 \;=\; 0, \quad a_n \;=\; 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\}, \quad n \in \{2,3,\ldots\}. \tag{4.9}$$

Покладемо $b_n := a_n - \alpha \ln^2 n$, $n \in \mathbb{N}$. З (4.9) випливає, що $b_1 = 0$ та

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (\ln^2(n-i) - \ln^2 n)\mathbb{P}\{I_n = i\} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\} \\ &=: c_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\}, \quad n \in \{2, 3, \ldots\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Використовуючи лему 49 (з $k = 1$ та $k = 2$), маємо

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \big(\ln^2(1 - i/n) + 2\ln n \ln(1 - i/n)\big)\,\mathbb{P}\{I_n = i\} \\ &= 1 + \frac{\alpha}{\Psi(n,b)}\Big(m_2 + O\Big(\frac{\ln^2 n}{n^{b\wedge 1}}\Big) + 2\ln n\Big(-m_1 + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big)\Big)\Big) \\ &= 1 \,-- \frac{\ln n}{\Psi(n,b)} + \frac{m_2}{2m_1\Psi(n,b)} + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big), \end{aligned}$$

та, згідно з (4.3),

$$\begin{aligned} c_n &= 1 \,-- \frac{\Psi(n,b) + \Psi(b) + 1 + O(1/n)}{\Psi(n,b)} + \frac{m_2}{2m_1\Psi(n,b)} + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big) \\ &= \frac{\frac{m_2}{2m_1} - \Psi(b) - 1}{\Psi(n,b)} + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big) \;=:\; \frac{C_1}{\Psi(n,b)} + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big). \end{aligned}$$

Підставляючи це співвідношення у (4.10), маємо

$$b_n \;=\; \frac{C_1}{\Psi(n,b)} + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\}.$$

Покладемо $d_n := b_n - (C_1/m_1)\ln n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді $d_1 = 0$ та

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{C_1}{\Psi(n,b)} + \frac{C_1}{m_1}\sum_{i=1}^{n-1} \ln(1 - i/n)\mathbb{P}\{I_n = i\} \\ &\qquad + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} d_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\}, \quad n \in \{2, 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

Використовуючи лему 49, отримаємо

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{C_1}{\Psi(n,b)} + \frac{C_1}{m_1\Psi(n,b)}\Big(-m_1 + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big)\Big) \\ &\qquad + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} d_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\} \\ &= O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} d_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\}. \end{aligned}$$

Згідно з лемою 50, $d_n = O(1)$. Тому $a_n = \alpha \ln^2 n + r_1 \ln n + O(1)$, а отже (4.7) доведено для $k = 1$.

Крок індукції від $\{1, \ldots, k\}$ до $k+1$ працює таким чином. Використовуючи (4.1) та упускаючи члени меншого порядку (що можливо за припущенням індукції), маємо $a_1^{(k+1)} = 0$ та

$$\begin{aligned} a_n^{(k+1)} &= (k+1)\alpha^k \ln^{2k} n + (k+1) r_k \ln^{2k-1} n + \\ &\quad + O(\ln^{2k-2} n) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j}^{(k+1)} \mathbb{P}\{I_n = j\}, \quad n \in \{2, 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

Покладемо $b_n^{(k+1)} := a_n^{(k+1)} - \alpha^{k+1} \ln^{2k+2} n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді отримаємо $b_1^{(k+1)} = 0$ та

$$b_n^{(k+1)} = c_n^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}^{(k+1)} \mathbb{P}\{I_n = j\}, \quad n \in \{2, 3, \ldots\}, \tag{4.11}$$

де

$$\begin{aligned} c_n^{(k+1)} &:= \alpha^{k+1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\ln^{2k+2}(n-j) - \ln^{2k+2} n \right) \mathbb{P}\{I_n = j\} \\ &\quad + (k+1)\alpha^k \ln^{2k} n + (k+1) r_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n). \end{aligned}$$

Біноміальний розклад $\ln^{2k+2}(n-j) = (\ln(1-j/n) + \ln n)^{2k+2}$ дає

$$\begin{aligned} c_n^{(k+1)} &= (k+1)\alpha^k \ln^{2k} n + (k+1) r_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n) \\ &\quad + \alpha^{k+1} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = j\} \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+2}{i} \ln^{2k+2-i}(1-j/n) \ln^i n \\ &= (k+1)\alpha^k \ln^{2k} n + (k+1) r_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n) \\ &\quad + \alpha^{k+1} \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+2}{i} \ln^i n \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = j\} \ln^{2k+2-i}(1-j/n). \end{aligned}$$

З леми 49 випливає

$$
\begin{aligned}
&c_n^{(k+1)}\\
&= (k+1)\alpha^k \ln^{2k} n + (k+1) r_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n)\\
&\quad + \frac{\alpha^{k+1}}{\Psi(n,b)} \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+2}{i} \ln^i n \Big((-1)^i m_{2k+2-i}^{(b)} + O\Big(\frac{\ln^{2k+2-i} n}{n^{b\wedge 1}}\Big)\Big)\\
&= (k+1)\alpha^k \ln^{2k} n + (k+1) r_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n)\\
&\quad + \frac{\alpha^{k+1}}{\Psi(n,b)} \left(-m_1 \binom{2k+2}{2k+1} \ln^{2k+1} n + m_2 \binom{2k+2}{2k} \ln^{2k} n \right)\\
&= (k+1)\alpha^k \ln^{2k} n \Big(1 - \frac{\ln n}{\Psi(n,b)} \Big)\\
&\quad + \left((k+1) r_k + \alpha^{k+1} (2k+1)(k+1) m_2 \frac{\ln n}{\Psi(n,b)} \right) \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n)\\
&= (k+1) \Big(r_k + (2k+1)\alpha^{k+1} m_2 - (\Psi(b)+1)\alpha^k \Big) \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n)\\
&=: c_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n).
\end{aligned}
$$

Підставляючи останній вираз у (4.11), отримаємо $b_1^{(k+1)} = 0$ та

$$
b_n^{(k+1)} = c_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n) + \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}^{(k+1)} \mathbb{P}\{I_n = j\}, \ n \in \{2, 3, \ldots\}.
$$

Покладемо $e_n^{(k+1)} := b_n^{(k+1)} - C_k \ln^{2k+1} n$, $n \in \mathbb{N}$, де $C_k := c_k/((2k+1)m_1)$. Так визначена послідовність задовольняє рекурсію

$$
\begin{aligned}
e_n^{(k+1)} &= c_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n)\\
&\quad + C_k \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\ln^{2k+1}(n-i) - \ln^{2k+1} n \Big) \mathbb{P}\{I_n = i\}\\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} e_{n-j}^{(k+1)} \mathbb{P}\{I_n = j\}\\
&= c_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n)\\
&\quad + C_k \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = i\} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k+1}{j} \ln^j n \ln^{2k+1-j}(1 - i/n)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} e_{n-j}^{(k+1)} \mathbb{P}\{I_n = j\}.
\end{aligned}
$$

Ще одне використання леми 49 дає

$$\begin{aligned} e_n^{(k+1)} &= c_k \ln^{2k-1} n + O(\ln^{2k-2} n) \\ &\qquad + C_k \frac{\ln^{2k} n}{\Psi(n,b)}(2k+1)\Big(-m_1 + O\Big(\frac{\ln n}{n^{b\wedge 1}}\Big)\Big) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n-1} e_{n-j}^{(k+1)} \mathbb{P}\{I_n = j\} \\ &= O(\ln^{2k-2} n) + \sum_{j=1}^{n-1} e_{n-j}^{(k+1)} \mathbb{P}\{I_n = j\}, \end{aligned}$$

згідно з вибором C_k. Для досить великих n можемо обрати $M_k > 0$ так, щоб член $O(\ln^{2k-2} n)$ мажорувався виразом

$$M_k(k\alpha^{k-1} \ln^{2k-2} n + kr_{k-1} \ln^{2k-3} n + O(\ln^{2k-4} n)).$$

Для такого $M_k > 0$ і великих n, $e_n^{(k+1)} \leq M_k a_n^{(k)}$. За припущенням індукції, $a_n^{(k)} = O(\ln^{2k} n)$, а тому $e_n^{(k+1)} = O(\ln^{2k} n)$. Покладемо $r_{k+1} := C_k = c_k/((2k+1)m_1)$ і отримаємо

$$a_n^{(k+1)} = \alpha^{k+1} \ln^{2k+2} n + r_{k+1} \ln^{2k+1} n + O(\ln^{2k} n).$$

Послідовність $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ задовольняє рекурсію

$$r_{k+1} = \frac{k+1}{(2k+1)m_1}(r_k + (2k+1)\alpha^{k+1} m_2 - (\Psi(b)+1)\alpha^k),$$

з початковою умовою

$$r_1 = \frac{\frac{m_2}{2m_1} - \Psi(b) - 1}{m_1} = \frac{\frac{\zeta(3,b)}{\zeta(2,b)} - \Psi(b) - 1}{\zeta(2,b)}.$$

Єдиний розвязок цієї рекурсії дається формулою (4.8). Доведення теореми 41 завершене. $\square$

Доведення теореми 44. Для $n \in \mathbb{N}$ та довільного $\varepsilon > 0$ покладемо $A_n(\varepsilon) := \{|X_n - \mathbb{E}X_n| \geq \varepsilon \mathbb{E}X_n\}$. З нерівності Чебишева випливає $\mathbb{P}\{A_n(\varepsilon)\} \leq \mathbb{D}X_n/(\varepsilon\mathbb{E}X_n)^2$. З теореми 41 випливає

$$\frac{\mathbb{D}X_n}{(\mathbb{E}X_n)^2} = \frac{4}{3} m_2 \frac{1}{\ln n} + O\Big(\frac{1}{\ln^2 n}\Big).$$

Тому, замінюючи n на $n_k := \lfloor \exp(k^2) \rfloor$, маємо що $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{n_k}(\varepsilon)\} < \infty$, а, отже, $X_{n_k}/\mathbb{E}X_{n_k} \to 1$ майже напевно при $k \to \infty$ за лемою Бореля-Кантеллі. Отже, ми вже встановили результат на підпослідовності $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Для натурального число $n \geq n_1$ існує єдиний індекс $k = k(n) \in \mathbb{N}$ такий, що $n_k \leq n < n_{k+1}$. З визначення випливає, що послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є майже напевно неспадною. Тому теорема випливає з теореми про двох поліцаїв, нерівності

$$\frac{X_{n_k}}{\mathbb{E}X_{n_k}} \frac{\mathbb{E}X_{n_k}}{\mathbb{E}X_{n_{k+1}}} \leq \frac{X_n}{\mathbb{E}X_n} \leq \frac{X_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}X_{n_{k+1}}} \frac{\mathbb{E}X_{n_{k+1}}}{\mathbb{E}X_{n_k}} \quad \text{майже напевно}$$

та того, що $\mathbb{E}X_{n_k}/\mathbb{E}X_{n_{k+1}} \sim \ln^2 n_k / \ln^2 n_{k+1} \sim k^4/(k+1)^4 \to 1$. Доведення теореми 44 завершене. □

4.1.4. Доведення теореми 45.

Ми застосуємо Теорему 2.1 Найнінгера та Рушендорфа [98], що записана нижче у модифікованому вигляді, що був запропонований у [59], теорема 10.

Твердження 47. *Припустимо, що послідовність $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випадкових величин задовольняє рекурентному співвідношенню*

$$U_n \overset{d}{=} U_{J_n} + V_n, \quad n \in \{n_0, n_0+1, \ldots\}, \tag{4.12}$$

для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$, де (J_n, V_n) не залежить від $(U_n)_{n\geq n_0}$, J_n приймає значення з множини $\{0, 1, \ldots, n\}$ та $\mathbb{P}\{J_n = n\} < 1$ для всіх $n \geq n_0$. Припустимо, що $\|U_n\|_3 < \infty$ та для деяких сталих $C > 0$ та $\alpha > 0$ виконуються три умови:

(i) $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E} \ln \left(\frac{J_n \vee 1}{n} \right) < 0$ *та* $\sup_{n\geq 2} \left\| \ln \left(\frac{J_n \vee 1}{n} \right) \right\|_3 < \infty$.

(ii) Для деякого $\lambda \in [0, 2\alpha)$ та деякого $\kappa > 0$, при $n \to \infty$,

$$\|V_n - \mu_n + \mu_{J_n}\|_3 = O(\ln^\kappa n), \qquad \mathbb{D}U_n = C \ln^{2\alpha} n + O(\ln^\lambda n),$$

де $\mu_n := \mathbb{E}U_n$.

(iii) $\alpha > 1/3 + \max(\kappa, \lambda/2)$.

Тоді, при $n \to \infty$, послідовність $(U_n - \mu_n)/(\sqrt{C} \ln^\alpha n)$ слабко збігається до стандартного нормального розподілу.

Зауваження 48. Рекурсія (4.1) має вигляд (4.12) з випадковим індексом $J_n := n - I_n$, де I_n має розподіл (4.2). Згідно з лемою 49 та (4.3),

$$\mathbb{E}\ln\Big(\frac{J_n}{n}\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1}\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\mathbb{P}\{I_n=i\} \;\sim\; -\frac{m_1^{(b)}}{\ln n}.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\ln(J_n/n)=0$ і перша частина умови (i) у твердженні 47 не виконується. Тому твердження 47 не застосовне до рекурсії (4.1).

Зафіксуємо довільне $T>0$. Повне число зіткнень X_n є сумою числа зіткнень на проміжку часу $[0,T)$ (позначимо це число $X_n(T)$) та $[T,\infty)$ (позначимо це число $\widehat{X}_n(T)$). Оскільки коалесцент – це марківський процес, то $\widehat{X}_n(T) \stackrel{d}{=} X'_{|\varrho_n\Pi_T|}$, де в.в. X'_k не залежить від $(J_n,V_n) := (|\varrho_n\Pi_T|, X_n(T))$ та розподілена як X_k для кожного k. Отже, ми показали, що $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє іншому рекурентному співвідношенню виду (4.12), а саме

$$X_n \;\stackrel{d}{=}\; X_{|\varrho_n\Pi_T|} + X_n(T). \tag{4.13}$$

Доведення теореми 45. Доведемо, що рекурсія (4.13) задовольняє всім умовам твердження 47.

Оскільки $X_n \le n-1$ майже напевно, то $\|X_n\|_3<\infty$.

Нагадаємо, що $X_n(T)$ – це число стрибків процесу $(\varrho_n\Pi_t)_{t\in[0,T)}$. Якщо міра Λ не має атому в нулі, то будь-який Λ-коалесцент може бути побудований з точкового процесу Пуассона (див. стр. 1872 у [102]). З цієї побудови випливає, що з ймовірністю один $X_n(T)$ обмежена зверху випадковою величиною з розподілом Пуассона з параметром Tg_n. Згідно з (4.4), $Tg_n \sim (T/B(2,b))\ln n$. Тому

$$\|X_n(T)\|_3 \;=\; O(\ln n), \quad n\to\infty. \tag{4.14}$$

Нехай $Q(T) := (\widehat{f}_i(T))_{i\in\mathbb{N}}$ – переставлена у спадному порядку послідовність асимптотичних частот випадкового перестановного розбиття Π_T. Згідно з зауваженням 43, $1-\sum_{i=1}^\infty \widehat{f}_i(T) \;=\; e^{-\widehat{S}_T}$. Елементи множини $Q(T)\cup\{1-\sum_{i=1}^\infty \widehat{f}_i(T)\}$ – це довжини інтервалів (зліва направо), що утворюють розбиття $[0,1]$. Нехай $U_1,\dots,U_n$ – це вибірка розміру n з рівномірного на $[0,1]$ розподілу, що не залежить від довжин інтервалів.

Введемо величину $W_{n,i}(T)$ – кількість точок вибірки, які потрапили у інтервал довжини $\widehat{f}_i(T)$. Покладемо

$$\eta_n(T) \ := \ |\{i \in \{1, \ldots, n\} : U_i > 1 - e^{-\widehat{S}_T}\}|,$$

$$\zeta_n(T) \ := \ |\{i \geq 1 : W_{n,i}(T) > 0\}|, \quad \theta_n(T) \ := \ \zeta_n(T) + 1_{\{\eta_n(T)>0\}}.$$

З специфічної побудови (вона називається (див. [81]) "коробка фарб") випадкового перестановного розбиття випливає, що

$$|\varrho_n \Pi_T| \ \stackrel{d}{=} \ \zeta_n(T) + \eta_n(T).$$

Міркуючи так само, як на стр. 592 у [59] робимо висновок, що, при $n \to \infty$, $\eta_n(T)/n \to e^{-\widehat{S}_T}$ майже напевно, з чого випливає

$$\lim_{n\to\infty} -\ln\left(\frac{\eta_n(T) \vee 1}{n}\right) \ = \ \widehat{S}_T \tag{4.15}$$

майже напевно, та, для довільного $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\left(\ln\left(\frac{\eta_n(T) \vee 1}{n}\right)\right)^k\right| \ = \ \mathbb{E}\widehat{S}_T^k. \tag{4.16}$$

Згідно з (4.6) права частина останнього виразу скінченна для довільного $k \in \mathbb{N}$. Інтерпретуючи інтервали як урни, а точки як "кулі" маємо, що $\theta_n(T)$ – це число зайнятих урн у класичній мультиноміальній урновій схемі. Використовуючи результати на стр. 152 у [50], отримаємо, що $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbb{E}(\theta_n(T)|\widehat{f}_i(T) \ : \ i \ \in \ \mathbb{N}) \ = \ 0$ майже напевно. З цього факту та твердження 2 у тій же роботі (див. також теорему 8 у [78]) випливає, що $\lim_{n\to\infty} \theta_n(T)/n = 0$ майже напевно при фіксованій послідовності $(\widehat{f}_i(T))_{i\in\mathbb{N}}$, а, отже, й безумовно. З цього випливає $\lim_{n\to\infty} |\varrho_n \Pi_T|/n = e^{-\widehat{S}_T}$ майже напевно, а, отже,

$$\lim_{n\to\infty} -\ln\left(\frac{|\varrho_n \Pi_T| \vee 1}{n}\right) \ = \ e^{-\widehat{S}_T} \tag{4.17}$$

майже напевно. Оскільки

$$-\ln\left(\frac{|\varrho_n \Pi_T| \vee 1}{n}\right) \ \leq \ -\ln\left(\frac{\eta_n(T) \vee 1}{n}\right)$$

майже напевно, то (4.15), (4.16), та (4.17) разом дають, що для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\left(\ln\left(\frac{|\varrho_n \Pi_T| \vee 1}{n}\right)\right)^k\right| \;=\; \mathbb{E}\widehat{S}_T^k, \tag{4.18}$$

згідно з лемою Пратта (див. [104]).

Умова (i) Твердження 47 випливає з (4.18). Оцінка $\|\mu_n - \mu_{J_n}\|_3 = O(\ln n)$ випливає з теореми 41 та (4.18). З цього спостереження, формули (4.14) та теореми 41 випливає, що умова (ii) виконується з $\kappa = 1$, $\alpha = 3/2$ та $\lambda = 2$. Тому (iii) також виконуєтсья. □

4.1.5. Допоміжні результати. Доведення теореми 41 грунтується на допоміжних технічних результатах, які наведені нижче.

Лема 49. *Для всіх $k \in \mathbb{N}$ та $b > 0$, при $n \to \infty$,*

$$\left|\Psi(n,b)\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}\{I_n = i\}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k - m_k^{(b)}\right| \;=\; O\Big(\frac{\ln^k n}{n^{b\wedge 1}}\Big), \tag{4.19}$$

де $m_k^{(b)} = k!\zeta(k+1,b)$ – це k-ий момент (див. (4.6)) міри Леві (4.5).

Доведення. Спочатку ми доведемо, що

$$J_n(b,k) \;:=\; \Big|\sum_{i=1}^{n-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)^{b-1}\frac{1}{i}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k - m_k^{(b)}\Big| \;=\; O\Big(\frac{\ln^k n}{n^{b\wedge 1}}\Big) \tag{4.20}$$

та

$$L_n(b,k) \;:=\; \Big|\sum_{i=1}^{n-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)^{b-1}\frac{1}{i+1}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k - m_k^{(b)}\Big| \;=\; O\Big(\frac{\ln^k n}{n^{b\wedge 1}}\Big). \tag{4.21}$$

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$. Для $b > 1$ введемо неперервну невідємну функцію $f_b(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ таким чином $f_b(x) := x^{-1}(1-x)^{b-1}(-\ln(1-x))^k$ при $x \in (0,1)$, $f(0) := 1_{\{k=1\}}$ та $f(1) := 0$. Оберемо деяке $\delta \in (0,1)$ так, що f

незростає на $[\delta, 1]$. Тоді

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=[n\delta]+1}^{n-1} f_b\Big(\frac{k}{n}\Big) - \int_\delta^1 f_b(x)\,dx\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=[n\delta]+1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\Big(f_b\Big(\frac{k}{n}\Big) - f_b(x)\Big)\,dx - \int_\delta^{([n\delta]+1)/n} f_b(x)\,dx\Big| \\
&\le \sum_{k=[n\delta]+1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\Big(f_b\Big(\frac{k}{n}\Big) - f_b\Big(\frac{k+1}{n}\Big)\Big)\,dx + \int_\delta^{([n\delta]+1)/n} f_b(x)\,dx \\
&= O\Big(\frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}
$$

Легко показати, що функція f_b має обмежену похідну на $[0, \delta]$. Тому, використовуючи теорему про середнє для диференційовних функцій (теорема Лагранжа), маємо

$$
\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[n\delta]} f_b\Big(\frac{k}{n}\Big) - \int_0^\delta f_b(x)\,dx\Big| \;=\; O\Big(\frac{1}{n}\Big).
$$

Поєднуючи ці дві частини та використовуючи рівність $m_k^{(b)} = \int_0^1 f(x)\,dx$ маємо $J_n(b,k) = O(1/n)$, що сильніше ніж стверджується в лемі.

Припустимо, що $b \in (0, 1]$. Застосовуючи попередній результат до функції f_{b+1}, яка задовольняє рівність

$$
f_{b+1}(x) := \frac{(1-x)^{b-1}(-\ln(1-x))^k}{x} - (1-x)^{b-1}(-\ln(1-x))^k
$$

для $x \in (0, 1)$ маємо, що

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{n-1}\Big(&\frac{(1-\frac{i}{n})^{b-1}(-\ln(1-\frac{i}{n}))^k}{i} - \frac{(1-\frac{i}{n})^{b-1}(-\ln(1-\frac{i}{n}))^k}{n}\Big) \\
&- \int_0^1 g(x)\,dx\Big| \;=\; O\Big(\frac{1}{n}\Big). \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Помітимо, що $\int_0^1 g(x)\,dx = m_k - k!/b^{k+1}$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $b\ln n \ge 1$, тоді

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{i}{n}\Big)^{b-1}\Big(-\ln\Big(\frac{i}{n}\Big)\Big)^k &\geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{b-1}(-\ln x)^k\,dx \\
&= \frac{k!}{b^{k+1}}\Big(1-n^{-b}\sum_{i=0}^{k}\frac{(b\ln n)^i}{i!}\Big) \\
&\geq \frac{k!}{b^{k+1}} - k!\frac{\ln^k n}{bn^b}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!} \\
&\geq \frac{k!}{b^{k+1}} - k!e\frac{\ln^k n}{bn^b},
\end{aligned}$$

звідки випливає, що, при $n\to\infty$,

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)^{b-1}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k - \frac{k!}{b^{k+1}}\Big| = O\Big(\frac{\ln^k n}{n^b}\Big).$$

Поєднуючи цю оцінку та (4.22), отримаємо (4.20).

Доведемо тепер (4.21). Якщо $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, то

$$\begin{aligned}
0 &\leq M_n(b,k) \\
&:= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(1-\frac{i}{n})^{b-1}(-\ln(1-\frac{i}{n}))^k}{i} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(1-\frac{i}{n})^{b-1}(-\ln(1-\frac{i}{n}))^k}{i+1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(1-\frac{i}{n})^{b-1}(-\ln(1-\frac{i}{n}))^k}{i^2} \\
&\sim \frac{1}{n}\int_0^1\frac{(1-x)^{b-1}(-\ln(1-x))^k}{x^2}\,dx,
\end{aligned}$$

а останній інтеграл скінченний. Тому $M_n(b,k)=O(1/n)$, що у поєднанні з (4.20) доводить (4.21) за зроблених припущень.

Якщо $k=1$, то

$$\begin{aligned}
0 &\leq M_n(b,k) \\
&\leq n^{(1-b)\vee 0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{-\ln(1-\frac{i}{n})}{i^2} = n^{(1-b)\vee 0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\frac{i}{n})^j}{j} \\
&\leq n^{(1-b)\vee 0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{i}{n}\Big)^j = n^{(1-b)\vee 0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\frac{\frac{i}{n}}{1-\frac{i}{n}} \\
&= n^{(1-b)\vee 0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(n-i)} = n^{(1-b)\vee 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{i}+\frac{1}{n-i}\Big) \sim \frac{2\ln n}{n^{b\wedge 1}}.
\end{aligned}$$

Це співвідношення та (4.20) доводить (4.21).

Для $b=1$, ліва частина (4.21) співпадає з лівою частиною (4.19). Отже, ми маємо перевірити (4.19) при $b\neq 1$. Для цього, маючи на увазі (4.20) та (4.21), досить показати, що

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{\Gamma(n-i+b-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-i)\Gamma(n+b)}-\Big(1-\frac{i}{n}\Big)^{b-1}\Big)\frac{1}{i+1}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k\Big|\\
&\quad = \ O\Big(\frac{\ln^k n}{n^{b\wedge 1}}\Big). \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Для цього доведемо спочатку, що для довільного $b>0$ існує стала $M>0$ така, що для всіх $n\in\mathbb{N}$ та всіх $j\in\{1,\dots,n-1\}$,

$$\Big|\frac{\Gamma(n-j+b-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-j)\Gamma(n+b)}-\Big(1-\frac{j}{n}\Big)^{b-1}\Big|\le\frac{M}{n}\Big(1-\frac{j}{n}\Big)^{b-2}, \qquad (4.24)$$

або, що еквівалентно,

$$\Big|\frac{\Gamma(j+b-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(j)\Gamma(n+b)}-\Big(\frac{j}{n}\Big)^{b-1}\Big|\le\frac{M}{n}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{b-2}. \qquad (4.25)$$

У подальших міркуваннях використовується така оцінка (див. формулу 6.1.47 у [6]). Для всіх $c,d>-1$, існує стала $M_{c,d}>0$ така, що для всіх $n\in\mathbb{N}$ маємо

$$\Big|\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n+d)}-n^{c-d}\Big|\le M_{c,d}n^{c-d-1}.$$

Оцінка (4.25) випливає з ланцюжка нерівностей

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Gamma(j+b-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(j)\Gamma(n+b)}-(\frac{j}{n})^{b-1}\Big|\\
&\quad= \ \Big|\Big(\frac{\Gamma(j+b-1)}{\Gamma(j)}-j^{b-1}\Big)\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+b)}+\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+b)}j^{b-1}-\Big(\frac{j}{n}\Big)^{b-1}\Big|\\
&\quad\le \ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+b)}\Big|\frac{\Gamma(j+b-1)}{\Gamma(j)}-j^{b-1}\Big|+j^{b-1}\Big|\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+b)}-n^{1-b}\Big|\\
&\quad\le \ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+b)}M_{b-1,0}j^{b-2}+j^{b-1}M_{1,b}n^{-b}\\
&\quad\le \ \Big|\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+b)}-n^{1-b}\Big|M_{b-1,0}j^{b-2}+n^{1-b}M_{b-1,0}j^{b-2}+j^{b-1}M_{1,b}n^{-b}\\
&\quad\le \ \frac{M_{1,b}M_{b-1,0}}{n^2}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{b-2}+\frac{M_{b-1,0}}{n}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{b-2}+\frac{M_{1,b}}{n}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{b-1}\\
&\quad\le \ \frac{M}{n}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{b-2},
\end{aligned}$$

де $M := M_{1,b}M_{b-1,0} + M_{b-1,0} + M_{1,b}$. Підставляючи (4.24) у ліву частину (4.23), маємо

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{\Gamma(n-i+b-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-i)\Gamma(n+b)} - \Big(1-\frac{i}{n}\Big)^{b-1}\Big)\frac{1}{i+1}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k\Big| \\
&\le \frac{M}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)^{b-2}\frac{1}{i+1}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k =: Q_n(b,k).
\end{aligned}$$

Для $b > 1$ функція $x^{-1}(1-x)^{b-2}\ln^k(1-x)$ інтегровна на $[0,1]$, з чого випливає, що остання сума є обмеженою і права частина (4.23) є $O(1/n)$. Нехай $b \in (0,1)$, функція $x \mapsto x^{-1}(-\ln(1-x))^k$ неспадає на $(0,1)$, тому

$$\begin{aligned}
Q_n(b,k) &= \frac{M}{n^b}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^{b-2}\frac{1}{(i+1)/n}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k \\
&\le \frac{M}{n^b}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^{b-2}\frac{1}{i/n}\Big(-\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)^k \\
&\le \frac{2M\ln^k n}{n^b}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^{b-2} = O\Big(\frac{\ln^k n}{n^b}\Big).
\end{aligned}$$

Отже, ми показали (4.23) і доведення завершене. □

Лема 50. *Нехай $k \in \mathbb{N}$ та $b > 0$. Якщо послідовність $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, визначена рекурсивно формулою*

$$v_1 := 0, \quad v_n := O\Big(\frac{\ln^k n}{n^b}\Big) + \sum_{i=1}^{n-1} v_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\}, \quad n \in \{2,3,\ldots\},$$

де $\mathbb{P}\{I_n = k\}$ визначається згідно з (4.2), то $v_n = O(1)$.

Доведення. Оскільки $\mathbb{E}I_n \sim \dfrac{n}{b\ln n}$, то існує стала $M > 0$ така, що для всіх $n = 2,3,\ldots$

$$\frac{b}{2n^{1+b/2}}EI_n \ge \frac{M\ln^k n}{n^b}. \tag{4.26}$$

Достатньо довести таке. Якщо

$$u_1 := 0, \quad u_n = \frac{M\ln^k n}{n^b} + \sum_{i=1}^{n-1} u_{n-i}\mathbb{P}\{I_n = i\}, \quad n \in \{2,3,\ldots\},$$

з M, визначеним у (4.26), то

$$u_n \ \leq \ 2 - n^{-b/2} \quad \text{для всіх} \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Використаємо індукцію. Для $n = 1$, (4.27) очевидно виконується, оскільки $u_1 = 0$. Припустимо, що (4.27) виконується для $n \in \{1, \ldots, m-1\}$. Тоді

$$u_m \ \leq \ \frac{M \ln^k m}{m^b} + \sum_{i=1}^{m-1} (2 - (m-i)^{-b/2}) \mathbb{P}\{I_m = i\}.$$

Ми доведемо, що права частина рівності не перевищує $2 - m^{-b/2}$, або, що еквівалентно,

$$\sum_{i=1}^{m-1} ((m-i)^{-b/2} - m^{-b/2}) \mathbb{P}\{I_m = i\} \ \geq \ \frac{M \ln^k m}{m^b}.$$

З нерівності $(1-x)^{-a} \geq 1 + ax$, $x \in (0,1)$, $a > 0$, випливає

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m-1} \big((m-i)^{-b/2} - m^{-b/2}\big) \mathbb{P}\{I_m = i\} \\ &\qquad = \ m^{-b/2} \sum_{i=1}^{m-1} \big((1 - i/m)^{-b/2} - 1\big) \mathbb{P}\{I_m = i\} \\ &\qquad \geq \ \frac{b}{2m^{1+b/2}} \mathbb{E} I_m \ \geq \ \frac{M \ln^k m}{m^b}, \end{aligned}$$

згідно з (4.26). □

Зауваження 51. Цю лему можна вивести з твердження 15, поклавши в останньому $\psi_n := \ln n$.

4.2. Асимптотична поведінка функціоналів, що діють на коалесценті Пуассона-Діріхле.

4.2.1. Означення та основні властивості коалесцента Пуассона-Діріхле. Коалесцент Пуассона-Діріхле $PD(t) = PD_\theta(t)$ – це коалесцент з одночасними множинними зіткненнями (див. вступ) та мірою Ξ, що має носій $\Delta^* := \{x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0 : \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1\}$ та щільність $x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ по відношенню до розподілу Пуассона-Діріхле Π_θ з параметром $\theta > 0$. Згідно з формулою (14) та обчисленнями Кінгмана (див. [84, Розділ 9.5] (див. також [94]), коалесцент Пуассона-Діріхле має інтенсивності

$$\psi_j(k_1,\ldots,k_j) = \frac{\theta^j}{[\theta]_k}\prod_{i=1}^{j}(k_i-1)!, \tag{4.28}$$

де $j,k_1,\ldots,k_j\in\mathbb{N}$ та $k := k_1+\ldots+k_j > j$ та $[\theta]_k := \theta(\theta+1)\cdots(\theta+k-1)$.

Розглянемо процес $(D(t))_{t\geq 0}$, де $D(t) = |\varrho_n PD(t)\|$ – це число блоків розбиття $\{1,2,\ldots,n\}$ у момент часу $t\geq 0$. Процес $(D(t))_{t\geq 0}$ є процесом чистої загибелі з інтенсивностями (див. [94])

$$\begin{aligned} g_{nk} &= \frac{n!}{k!}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}\\ n_1+\ldots+n_k=n}}\frac{\psi_j(k_1,\ldots,k_j)}{n_1!\cdots n_k!}\\ &= \frac{\theta^k n!}{[\theta]_n k!}\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}\\ n_1+\ldots+n_k=n}}\frac{1}{n_1\cdots n_k} = \frac{\theta^k}{[\theta]_n k!}s(n,k), \end{aligned}$$

при $k,n\in\mathbb{N}$ та $k<n$, де $s(n,k)$ – це абсолютні (беззнакові) числа Стірлінга першого роду. Повні інтенсивності рівні

$$g_n = \sum_{k=1}^{n-1} g_{nk} = 1-\frac{\theta^n}{[\theta]_n},\ n\geq 2. \tag{4.29}$$

Нехай X_n – це число зіткнень у звуженому коалесценті Пуассона-Діріхле $(\varrho_n PD(t))_{t\geq 0}$, доки не залишиться єдиний блок. Послідовність X_n задовольняє випадковій лінійній рекурсії

$$X_1 = 0,\ \ X_n \overset{d}{=} 1 + X'_{J_n},\ n\geq 2, \tag{4.30}$$

де J_n має розподіл

$$\mathbb{P}\{J_n = k\} = \frac{g_{nk}}{g_n} = \frac{\theta^k}{[\theta]_n-\theta^n}s(n,k),\ k\in\{1,2\ldots,n-1\}. \tag{4.31}$$

Час поглинання τ_n у коалесценті Пуассона-Діріхле задовольняє випадковій лінійній рекурсії

$$\tau_1 = 0,\ \ \tau_n \overset{d}{=} V_n + \tau'_{J_n},\ n\geq 2, \tag{4.32}$$

де V_n має показниковий розподіл з параметром $g_n = 1-\frac{\theta^n}{[\theta]_n}$ і не залежить від $(\tau'_n)_{n\geq 1}$ – незалежної копії $(\tau_n)_{n\geq 1}$

Повна довжина дерева у коалесценті Пуассона-Діріхле $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє випадковій лінійній рекурсії

$$L_1 = 0, \quad L_n \stackrel{d}{=} nV_n + L'_{J_n}, \ n \geq 2. \tag{4.33}$$

4.2.2. Основні результати. Моменти випадкових величин X_n та τ_n мають таку асимптотичну поведінку

Теорема 52. *При $n \to \infty$, для довільного $k \in \mathbb{N}$*

$$\frac{\mathbb{E}Y_n^k}{(\ln_\theta^*(n))^k} \to 1,$$

де Y_n будь-яка з випадкових величин X_n та τ_n, а функція $x \mapsto \ln_\theta^*(x)$ визначається функціональним рівнянням

$$\ln_\theta^*(x) = (1 + \ln_\theta^*(\theta \ln x))1_{\{x > e^{2\theta \vee 1}\}}.$$

Функція $\ln_\theta^*(x)$ монотонно зростає, є необмеженою та росте повільніше за будь-яку ітерацію логарифма.

З попередньої теореми та нерівності Чебишева випливає слабкий закон великих чисел.

Наслідок 53. При $n \to \infty$,

$$\frac{X_n}{\ln_\theta^*(n)} \xrightarrow{P} 1 \ \text{ та } \ \frac{\tau_n}{\ln_\theta^*(n)} \xrightarrow{P} 1.$$

Для повної довжини дерева має місце слабка збіжність (цей результат отримано також у [94] іншим методом).

Теорема 54. *При $n \to \infty$*

$$\frac{L_n}{n} \xrightarrow{d} \eta,$$

де η має показниковий розподіл з параметром 1.

Твердження цієї теореми випливає з таких фактів:

- $L_0 = 0, \quad L_n \stackrel{d}{=} nV_n + L'_{J_n}, \ n \geq 2,$
- V_n має показниковий розподіл з параметром $1 - \frac{\theta^n}{[\theta]_n}$,
- $L_{J_n}/n \xrightarrow{P} 0$, що випливає з оцінок $\mathbb{E}L_n = O(n^2)$, $\mathbb{E}J_n = O(\ln n)$ при $n \to \infty$ та нерівності Маркова.

4.2.3. Доведення теорем 52. У доведенні теореми використовується метод ітеративних функцій, описаний у розділі 2. Доведемо теорему спочатку для послідовності X_n.

Доведення. З формули (4.31) випливає, що

$$\mathbb{E}J_n = \theta \ln n + O(1), \ \ \mathbb{D}\, J_n = \theta \ln n + O(1).$$

Покладемо

$$g(x) := \theta \ln x, \quad h(x) = 1 \ \text{ та } \ g^*(x) = \mathrm{Iter}(h, g, x_0),$$

для деякого фіксованого $x_0 > \exp(2\theta \vee 1)$. Такий вибір числа x_0 гарантує виконання умови (2.1). Дійсно при такому виборі x_0 маємо $\delta := x_0 - \theta \ln x_0 > 0$ та $x - \theta \ln x > \delta$ для всіх $x > x_0$. Функція g^* задовольняє функціональному рівнянню

$$g^*(x) = 1 + g^*(\theta \ln x), \ x > x_0.$$

Нехай F – це двічі диференційовна модифікація функції g^* вигляду (див. лему 17)

$$F(x) = \begin{cases} 1 + F(\theta \ln x), & x > x_0, \\ \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x, x \in [0, x_0], \end{cases}$$

для деяких $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. З цього випливає, що для довільного $j \in \mathbb{N}$,

$$F'(x) = o\left(\frac{1}{x \ln x \cdots \ln^{\circ(j)}(x)}\right) \ \text{ та } \ F''(x) = o\left(\frac{1}{x^2 (\ln x)^2 \cdots (\ln^{\circ(j)}(x))^2}\right).$$

Застосовуючи теорему 11, отримаємо $\mathbb{E}X_n \sim g^*(n) \sim F(n)$.

За індукцією легко показати, що для $k \geq 2$, послідовність $\mathbb{E}X_n^k$ задовольняє рекурсію

$$\mathbb{E}X_n^k = e_n(k) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{J_n = k\} \mathbb{E}X_i^k, \ n \geq 2,$$

де $e_n(k) = k(g^*(n))^{k-1} + o(k(g^*(n))^{k-1})$. Тому твердження теореми для моментів порядку $k \geq 2$ випливає з теорем 13 та 18. Оскільки $g^*(x) \sim \ln^* x$ при $x \to \infty$, твердження теореми доведено для послідовності X_n.

Оскільки випадкова величина V_n має показниковий розподіл з параметром $1-\frac{\theta^n}{[\theta]_n}$, то

$$\mathbb{E}V_n^k = k!\Big(1-\frac{\theta^n}{[\theta]_n}\Big)^{-(k+1)} \to k!$$

при $n\to\infty$. З цього випливає, що послідовність $\mathbb{E}\tau_n^k$ задовольняє рекурсію

$$\mathbb{E}\tau_n^k = e_n'(k) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\{J_n = k\}\mathbb{E}T_i^k,\ n\geq 2,$$

де $e_n'(k) = k\mathbb{E}V_n\mathbb{E}\tau_n^{k-1} + o(\mathbb{E}V_n\mathbb{E}\tau_n^{k-1})$. Оскільки $e_n'(k)\sim e_n(k)$, то використовуючи теорему 13 маємо, що $\mathbb{E}\tau_n^k \sim \mathbb{E}X_n^k \sim (g^*(n))^k$. Теорема доведена повністю. □

4.3. Висновки до розділу 4

Перша частина розділу присвячена дослідженню асимптотичної поведінки X_n – числа зіткнень у бета$(2,b)$-коалесцентах. Зокрема для X_n встановлено такі результати:

- Знайдено двочленні асимптотичні розклади всіх звичайних моментів послідовності X_n.
- Встановлено посилений закон великих чисел для послідовноті X_n.
- Доведено, що $(X_n - a_n)/b_n$ (з відомими в явному вигляді послідовностями a_n та b_n) слабко збігається до стандартної нормальної величини.

У другій частині розділу встановлена низка результатів по асимптотичній поведінці функціоналів на коалесценті Пуассона-Діріхле. Всі результати цієї частини отримані з використанням методу ітеративних функцій, що описаний у розділі 2. Основні результати:

- Встановлено асимптотичну поведінку моментів числа зіткнень та часу поглинання в коалесценті Пуассона-Діріхле.
- Доведено закони великих чисел для кількості зіткнень та часу поглинання в коалесценті Пуассона-Діріхле.

- Для повної довжини дерева коалесцента Пуассона-Діріхле знайдено слабку асимптотичну поведінку.

ВИСНОВКИ

Отримані в даній дисертаційній роботі результати розв'язують ряд відкритих задач відносно асимптотичної поведінки лінійних випадкових рекурсивних послідовностей, як загального вигляду так і конкретних, що виникають у дослідженнях граток Бернуллі та коалесцентів з множинними зіткненнями.

Другий розділ роботи присвячений дослідженню моментів випадкових рекурсій.

В цьому розділі запропоновано новий загальний метод дослідження асимптотичної поведінки моментів лінійних випадкових рекурсивних послідовностей – метод ітеративних функцій. На ряді прикладів показана його універсальність, обговорено переваги та недоліки. Зокрема, за допомогою методу розв'язана декілька відкритих задач з теорії коалесцентів.

У другій частині другого розділу, за допомогою методу моментів, знайдено достатні умови слабкої збіжності нормованого часу поглинання спадного ланцюга Маркова до експоненційного функціоналу від субординатора, які доповнюють відомі результати по асимптотиці часу поглинання ланцюгів Маркова.

В третьому та четвертому розділах отримано результати, які розв'язують ряд відкритих задач відносно асимптотичної поведінки функціоналів, що виникають у схемі граток Бернуллі та у теорії коалесцентів з множинними зіткненнями.

1. Досліджена модель граток Бернуллі, яку можна інтерпретувати як схему розміщення n куль по нескінченній послідовності урн з випадковими ймовірностями попадання кулі до кожної урни. Знайдена асим-

птотична поведінка для деяких функціоналів на гратках Бернуллі, зокрема:

- у повній загальності встановлено слабку асимптотичну поведінку для певним чином нормалізованої та центрованої послідовності, що описує кількість зайнятих урн. В явному вигляді вказані коефіцієнти нормування та центрування та відповідні їм граничні розподіли.
- За додаткового моментного припущення знайдено асимптотику середнього числа порожніх урн, що розташовані зліва від самої правої зайнятої урни.
- Встановлена асимптотична поведінка числа малих часток у гратках Бернуллі за додаткового моментного припущення.

2. Встановлено асимптотичну поведінку функціоналів, що діють на певні класи коалесцентів. Зокрема,

   - Знайдено двочленні асимптотичні розклади моментів, встановлено посилений закон великих чисел та центральна гранична теорема для кількості зіткнень у бета$(2, b)$-коалесценті.
   - Для коалесцента Пуассона-Діріхле знайдено асимптотики моментів та встановлено слабкі закони великих чисел для числа зіткнень та часу поглинання. Для повної довжини дерева даного коалесцента знайдено слабку асимптотичну поведінку.

Бібліографія

[1] Іксанов О. М. Випадкові ряди спеціального вигляду, гіллясте випадкове блукання та саморозкладність / О. М. Іксанов. – Київ: Кті Прінт., 2007. – 192 с.

[2] Маринич О. В. Про асимптотичну поведінку моментів лінійних випадкових рекурсивних послідовностей / О. В. Маринич // *Доповіді НАН України.* – 2011. – № 3. – С. 23–27.

[3] Маринич О. В. Асимптотична поведінка часу поглинання спадних ланцюгів Маркова / О. В. Маринич // *Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки.* – 2010. – № 1. – С. 118–121.

[4] Негадайлов П. А. Асимптотичні результати для моментів поглинання випадкових блукань з бар'єром / П. А. Негадайлов // *Теор. ймовірност. та матем. статист.* – 2008. – № 79. – С. 114–125.

[5] Негадайлов П. А. Про моменти поглинання у випадковому блуканні з бар'єром / П. А. Негадайлов // *Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки.* – 2008. – № 4. – С. 149–152.

[6] Abramowitz M. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables / M. Abramowitz, I. Stegun. – Dover, New York, 1964. – 902 P.

[7] Alsmeyer G. Power and exponential moments of the number of visits and related quantities for perturbed random walks / G. Alsmeyer, A. Iksanov, M. Meiners. – подано до друку, 2011.

[8] Anderson K. K. A note on conjugate Π-variation and a weak limit theorem for the number of renewals / K. K. Anderson, K. B. Athreya // *Stat. Probab. Letters.* – 1988. – V. 6. – P. 151–154.

[9] Angel O. Global divergence of spatial coalescents / O. Angel, N. Berestycki, V. Limic // *Probab. Theory Relat. Fields.* – 2010. – V. 150. – P. 1–55.

[10] Araman V. F. Tail asymptotics for the maximum of perturbed random walk / V. F. Araman, P. W. Glynn // *Ann. Appl. Probab.* – 2006. – V. 16. – P. 1411–1431.

[11] Archibald M. The number of distinct values in a geometrically distributed sample / M. Archibald, A. Knopfmacher, H. Prodinger // *Europ. J. Combinat.* – 2006. – V. 27(7). – P. 1059–1081.

[12] Arratia R. Logarithmic combinatorial structures / R. Arratia, A. D. Barbour, S. Tavare. – European Mathematical Society, 2003. – 363 P.

[13] Bahadur R. R. On the number of distinct values in a large sample from an infinite discrete distribution / R. R. Bahadur // *Proc. Nat. Inst. Sci. India.* – 1960. – V. 26A. – P. 66–75.

[14] Bahadur R. R. Some limit theorems in statistics / R. R. Bahadur. – CBMS Regional conference series in applied mathematics. Philadelphia: SIAM., 1971. – 42 P.

[15] Bai Z. D. Normal approximations of the number of records in geometrically distributed random variables / Z. D. Bai, H. K. Hwang, W. Q. Liang // *Random Struct. Algor.* – 1998. – V. 13. – P. 319–334.

[16] Barbour A. D. Regenerative compositions in the case of slow variation / A. D. Barbour, A. V. Gnedin // *Stoch. Proc. Appl.* – 2006. – V. 116. – P. 1012–1047.

[17] Barbour A. D. Small counts in the infinite occupancy scheme / A. D. Barbour, A. V. Gnedin // *Electron. J. Probab.* – 2009. – V. 14. – P. 365–384.

[18] Baryshnikov Y. A necessary and sufficient condition for the existence of the limiting probability of a tie for first place / Y. Baryshnikov, B. Eisenberg, G. Stengle // *Stat. Probab. Letters.* – 1995. – V. 23(3). – P. 203–209.

[19] Berestycki J. Small-time behavior of beta coalescents / J. Berestycki, N. Berestycki, J. Schweinsberg // *Annales de l'Institut Henri Poincaré* – 2008. – V. 44. – P. 214–238.

[20] Berestycki J. The Λ-coalescent speed of coming down from infinity / J. Berestycki, N. Berestycki, V.Limic // *Ann. Probab.* – 2010. – V. 38. – P. 207–233.

[21] Berestycki N. Recent progress in coalescent theory / N. Berestycki // *Ensaios Matemáticos.* – 2009. – V. 16. – P. 1–193.

[22] Bertoin J. The Bolthausen–Sznitman coalescent and the genealogy of continuous-state branching processes / J. Bertoin, J. F. L. Gall // *Probab. Theory Related Fields* – 2000. – V. 117. – P. 249–266.

[23] Bertoin J. Two coalescents derived from the ranges of stable subordinators / J. Bertoin, J. Pitman // *Electron. J. Probab.* – 2000. – V. 5. – P. 1–17.

[24] Bertoin J. Exponential functionals of Lévy processes / J. Bertoin, M. Yor // *Probability Surveys* – 2005. – V. 2. – P. 191–212.

[25] Bingham N. H. Maxima of sums of random variables and suprema of stable processes / N. H. Bingham // *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* – 1973. – V. 26. – P. 273– 296.

[26] Bingham N. H. Regular variation / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. – Cambridge, Cambridge University Press, 1989. – 512 P.

[27] Birkner M. Alpha-stable branching and beta-coalescents / M. Birkner, J. Blath, M. Capaldo, A. Etheridge, M. Möhle, J. Schweinsberg, A. Wakolbinger // *Electron. J. Probab.* – 2005. – V. 10. – P. 303–325.

[28] Bolthausen E. On Ruelle's probability cascades and an abstract cavity method / E. Bolthausen, A.-S. Sznitman // *Comm. Math. Phys.* – 1998. – V. 197. – P. 247–276.

[29] Brands J. On the number of maxima in a discrete sample / J. Brands, F. Steutel, R. Wilms // *Stat. Probab. Letters.* – 1994. – V. 20. – P. 209–217.

[30] Bruhn V. Eine methode zur asymptotischen behandlungeiner klasse von rekursionsgleichungen mit einer anwendung in der stochastischen analyse des quicksort-algorithmus / V. Bruhn. – PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel , 1996. – 145 P.

[31] Bruss F. T. On the multiplicity of the maximum in a discrete random sample / F. T. Bruss, R. Grübel // *Ann. Appl. Probab.* – 2003. – V. 13(4). – P. 1252–1263.

[32] Bruss F. T. On the maximum and its uniqueness for geometric random samples / F. T. Bruss, C. A. O'Cinneide // *J. Appl. Probab.* – 1990. – V. 27. – P. 598–610.

[33] Chen C.-H. On the moment-transfer approach for random variables satisfying a one-sided distributional recurrence / C.-H. Chen, M. Fuchs // *Electron. J. Probab.* – 2011. – V. 16. – P. 903–928.

[34] Darling D. A. Some limit theorems assiciated with multinomial trials / D. A. Darling // *Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab.* – 1967. – V. 2. – P. 345–350.

[35] de Haan L. Conjugate Π-variation and process inversion / L. de Haan, S. I. Resnick // *Ann. Probab.* – 1979. – V. 7. – P. 1028–1035.

[36] Delmas J. F. Asymptotic results on the length of coalescent trees / J. F. Delmas, J. S. Dhersin, A. Siri-Jegousse // *Ann. Appl. Probab.* – 2008. – V. 18. – P. 997—-1025.

[37] Devillers O. Randomization yields simple $O(n \log^* n)$ algorithms for difficult $\Omega(n)$ problems / O. Devillers // *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* – 1992. – V. 2. – P. 621–635.

[38] Donnely P. Coalescents and genealogical structure under neutrality / P. Donnely, S. Tavare // *Annual Review of Genetics.* – 1995. – V. 29. – P. 401–421.

[39] Drmota M. Random trees: An interplay between combinatorics and probability / M. Drmota. – Springer, 2009. – 457 P.

[40] Drmota M. Asymptotic results about the total branch length of the bolthausen-sznitman coalescent / M. Drmota, A. Iksanov, M. Moehle, U. Roesler // *Stoch. Proc. Appl.* – 2007. – V. 117. – P. 1404–1421.

[41] Drmota M. A limiting distribution for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree / M. Drmota, A. Iksanov, M. Möhle, U. Rösler // *Random Struct. Algor.* – 2009. – V. 34. – P. 319–336.

[42] Durrett R. Fixed points of the smoothing transformation / R. Durrett, T. M. Liggett // *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* – 1983. – V. 64. – P. 275–301.

[43] Dutko M. Central limit theorems for infinite urn models / M. Dutko // *Ann. Probab.* – 1989. – V. 17. – P. 1255–1263.

[44] Eisenberg B. The asymptotic probability of a tie for first place / B. Eisenberg, G. Stengle, G. Strang // *Ann. Appl. Probab.* – 1993. – V. 3. – P. 731–745.

[45] Fill J. On the distribution for the duration of a randomized leader election algorithm / J. Fill, H. Mahmoud, W. Szpankowski // *Ann. Appl. Probab.* – 1996. – V. 6. – P. 1260–1283.

[46] Flajolet P. Analytic combinatorics / P. Flajolet, R. Sedgewick. – Cambridge University Press, 2008. – 810 P.

[47] Freund F. On the number of allelic types for samples taken from exchangeable coalescents with mutation / F. Freund, M. Möhle // *Adv. Appl. Probab.* – 2009. – V. 41. – P. 1082–1101.

[48] Freund F. On the time back to the most recent common ancestor and the external branch length of the bolthausen-sznitman coalescent / F. Freund, M. Möhle // *Markov Process. Related Fields.* – 2009. – V. 15. – P. 387–416.

[49] Gnedin A. The Bernoulli sieve / A. Gnedin // *Bernoulli.* – 2004. – V. 10. – P. 79–96.

[50] Gnedin A. Notes on the occupancy problem with infinitely many boxes: general asymptotics and power laws / A. Gnedin, A. Hansen, J. Pitman // *Probability Surveys.* – 2007. – V. 4. – P. 146–171.

[51] Gnedin A. The Bernoulli sieve: an overview / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* – 2010. – V. AM. – P. 329–342.

[52] Gnedin A. Limit theorems fot the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // *Theory Stoch. Proc.* – 2010. – V. 16(32). – P. 44–57.

[53] Gnedin A. Lambda-coalescents with dust component / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych. – подано до друку, 2011.

[54] Gnedin A. On asymptotics of exchangeable coalescents with multiple collisions / A. Gnedin, A. Iksanov, M. Möhle // *J. Appl. Probab.* – 2008. – V. 45. – P. 1186–1195.

[55] Gnedin A. The Bernoulli sieve revisited / A. Gnedin, A. Iksanov, P. Negadajlov, U. Roesler // *Ann. Appl. Probab.* – 2009. – V. 19. – P. 1634–1655.

[56] Gnedin A. Small parts in the Bernoulli sieve / A. Gnedin, A. Iksanov, U. Roesler // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* – 2008. – V. AI. – P. 235–242.

[57] Gnedin A. Regenerative composition structures / A. Gnedin, J. Pitman // *Ann. Probab.* – 2005. – V. 33. – P. 445–479.

[58] Gnedin A. Asymptotic laws for compositions derived from transformed subordinators / A. Gnedin, J. Pitman, M. Yor // *Ann. Probab.* – 2006. – V. 34. – P. 468–492.

[59] Gnedin A. Asymptotic laws for regenerative compositions: gamma subordinators and the like / A. Gnedin, J. Pitman, M. Yor // *Probab. Theory Relat. Fields.* – 2006. – V. 135. – P. 576–602.

[60] Gnedin A. On the number of collisions in Λ - coalescents / A. Gnedin, Y. Yakubovich // *Electron. J. Probab.* – 2007. – V. 12. – P. 1547–1567.

[61] Goh W. M. Y. Gaps in samples of geometric random variables / W. M. Y. Goh, P. Hitczenko // *Discrete Math.* – 2007. – V. 22. – P. 2871–2890.

[62] Goldschmidt C. Random recursive trees and the Bolthausen-Sznitman coalescent / C. Goldschmidt, J. Martin // *Electron. J. Probab.* – 2005. – V. 10. – P. 718–745.

[63] Greene D. H. Mathematics for the analysis of algorithms, 3d edition / D. H. Greene, D. E. Knuth. – Burkhauser, 1990. – 132 P.

[64] Gut A. Stopped random walks: Limit theorems and applications, 2nd edition / A. Gut. – Springer: New York, 2009. – 317 P.

[65] Haas B. Self-similar scaling limits of non-increasing Markov chains / B. Haas, G. Miermont. – Bernoulli, прийнято до друку, 2011.

[66] Hardy G. H. Divergent series / G. H. Hardy. – AMS Bookstore, 2000. – 396 P.

[67] Hitczenko P. Gap-free compositions and gap-free samples of geometric random variables / P. Hitczenko, A. Knopfmacher // *Discrete Math.* – 2005. – V. 294(3). – P. 225–239.

[68] Hitczenko P. Renorming divergent perpetuities / P. Hitczenko, J. Wesolowski. – Bernoulli, прийнято до друку, 2011.

[69] Hoare C. R. Quicksort / C. R. Hoare // *The Computer Journal.* – 1962. – V. 5(1). – P. 10–16.

[70] Hudson R. R. Gene genealogies and the coalescent process / R. R. Hudson // *Oxford Surv. Evol. Biol.* – 1991. – V. 7. – P. 1–44.

[71] Iksanov A. On the number of collisions in beta(2, b)-coalescents / A. Iksanov, A. Marynych, M. Möhle // *Bernoulli.* – 2009. – V. 15. – P. 829–845.

[72] Iksanov A. A probabilistic proof of a weak limit law for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree / A. Iksanov, M. Möhle // *Electron. Commun. Probab.* – 2007. – V. 12. – P. 28–35.

[73] Iksanov A. On the number of jumps of random walks with a barrier / A. Iksanov, M. Möhle // *Adv. Appl. Probab.* – 2008. – V. 40. – P. 206–228.

[74] Iksanov A. On the number of zero increments of random walks with a barrier / A. Iksanov, P. Negadajlov // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* – 2008. – V. AI. – P. 243–250.

[75] Iksanov A. On asymptotic behavior of certain recursions with random indices of linear growth / A. Iksanov, Y. Terletsky // *ProbStat Forum* – 2008. – V. 1. – P. 62–67.

[76] Janson S. Convergence of some leader election algorithm / S. Janson, C. Lavault, G. Louchard // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* – 2008. – V. 10(3). – P. 171–196.

[77] Janson S. Analysis of an asymmetric leader election algorithm / S. Janson, W. Szpankowski // *Electron. J. Combin.* – 1997. – V. 4 #R17.

[78] Karlin S. Central limit theorems for certain infinite urn schemes / S. Karlin // *J. Math. Mech.* – 1967. – V. 17. – P. 373–401.

[79] Karp R. M. Probabilistic recurrence relations / R. M. Karp // *J. Assoc. Comput. Mach.* – 1994. – V. 41. – P. 1136–1150.

[80] Kesten H. The number of distinguishable alleles according to the Ohta-Kimura model of neutral mutation / H. Kesten // *J. Math. Biol.* – 1980. – V. 10. – P. 167–187.

[81] Kingman J. F. C. The representation of partition structures / J. F. C. Kingman // *J. London Math. Soc.* – 1978. – V. 18. – P. 374–380.

[82] Kingman J. F. C. The coalescent / J. F. C. Kingman // *Stoch. Proc. Appl.* – 1982. – V. 13. – P. 235–248.

[83] Kingman J. F. C. On the genealogy of large populations / J. F. C. Kingman // *J. Appl. Probab.* – 1982. – V. 19. – P. 27–43.

[84] Kingman J. F. C. Poisson processes / J. F. C. Kingman. – Oxford University Press, 1993. – 112 P.

[85] Kirschenhofer P. The number of winners in a discrete geometrically distributed sample / P. Kirschenhofer, H. Prodinger // *Ann. Appl. Probab.* – 1996. – V. 6. – P. 687–694.

[86] Lavault C. Asymptotic analysis of a leader election algorithm / C. Lavault, G. Louchard // *Theoretical Computer Science.* – 2006. – V. 359(1). – P. 239–254.

[87] Louchard G. On gaps and unoccupied urns in sequence of geometrically distributed random variables / G. Louchard, H. Prodinger // *Discrete Math.* – 2008. – V. 308(9). – P. 1538–1562.

[88] Louchard G. The asymmetric leader election algorithm: another approach / G. Louchard, H. Prodinger // *Ann. Combinat.* – 2009. – V. 12(4). – P. 449–478.

[89] Mahmoud H. Evolution of random search trees / H. Mahmoud. – Wiley, New York, 1992. – 310 P.

[90] Meir A. Cutting down recursive trees / A. Meir, J. Moon // *Math. Biosci.* – 1974. – V. 21. – P. 173–181.

[91] Mohamed H. A probabilistic analysis of a leader election algorithm / H. Mohamed // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* – 2006. – V. Proceedings Series Vol. AD. – P. 225–256.

[92] Möhle M. On sampling distributions for coalescent processes with simultaneous multiple collisions / M. Möhle // *Bernoulli.* – 2006. – V. 12. – P. 35–53.

[93] Möhle M. On the number of segregating sites for populations with large family sizes / M. Möhle // *Adv. Appl. Probab.* – 2006. – V. 38. – P. 750–767.

[94] Möhle M. Asymptotic results for coalescent processes without proper frequencies and applications to the two-parameter Poisson - Dirichlet coalescent / M. Möhle // *Stoch. Proc. Appl.* – 2010. – V. 120. – P. 2159–2173.

[95] Möhle M. A classification of coalescent processes for haploid exchangeable population models / M. Möhle, S. Sagitov // *Ann. Probab.* – 2001. – V. 29. – P. 1547–1562.

[96] Neininger R. On a multivariate contraction method for random recursive structures with applications to Quicksort / R. Neininger // *Random Struct. Algor.* – 2001. – V. 19. – P. 498–524.

[97] Neininger R. A general limit theorem for recursive algorithms and combinatorial structures / R. Neininger, L. Rüschendorf // *Ann. Appl. Probab.* – 2004. – V. 14. – P. 378–418.

[98] Neininger R. On the contraction method with degenerate limit equation / R. Neininger, L. Ruschendorf // *Ann. Probab.* – 2004. – V. 32. – P. 2838–2856.

[99] Palmowski Z. On perturbed random walks / Z. Palmowski, B. Zwart // *J. Appl. Probab.* – 2010. – V. 47. – P. 1203–1204.

[100] Panholzer A. Non-crossing trees revisited: cutting down and spanning subtrees / A. Panholzer // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* – 2003. – V. Proceedings Series Vol. AC. – P. 265–276.

[101] Panholzer A. Cutting down very simple trees / A. Panholzer // *Quaest. Math.* – 2006. – V. 29. – P. 211–227.

[102] Pitman J. Coalescents with multiple collisions / J. Pitman // *Ann. Probab.* – 1999. – V. 27. – P. 1870–1902.

[103] Pitman J. Combinatorial stochastic processes / J. Pitman // *Springer Lecture Notes in Math.* – 2006. – V. 1875.

[104] Pratt J. W. On interchanging limits and integrals / J. W. Pratt // *Ann. Math. Stat.* – 1960. – V. 31. – P. 74–77.

[105] Prodinger H. How to select a loser / H. Prodinger // *Discrete Math.* – 1993. – V. 120. – P. 149–159.

[106] Rachev S. T. Probability metrics and recursive algorithms / S. T. Rachev, L. Rüschendorf // *Adv. Appl. Probab.* – 1995. – V. 27. – P. 770–799.

[107] Rachev S. T. Limit laws for a stochastic process and random recursion arising in probabilistic modelling / S. T. Rachev, G. Samorodnitsky // *Adv. Appl. Probab.* – 1995. – V. 27. – P. 185–202.

[108] Rösler U. A limit theorem for "Quicksort" / U. Rösler // *RAIRO, Inform. Theor. Appl.* – 1991. – V. 25. – P. 85–100.

[109] Rösler U. A fixed point theorem for distributions / U. Rösler // *Stoch. Proc. Appl.* – 1992. – V. 42. – P. 195–214.

[110] Rosler U. On the analysis of stochastic divide and conquer algorithms. / U. Rosler // *Algorithmica* – 2001. – V. 29. – P. 238–261.

[111] Rösler U. The contraction method for recursive algorithms / U. Rösler, L. Rüschendorf // *Algorithmica* – 2001. – V. 29. – P. 3–33.

[112] Ross S. M. A simple heuristic approach to simplex efficiency / S. M. Ross // *Europ. J. Operat. Res.* – 1982. – V. 9. – P. 344–346.

[113] Sagitov S. The general coalescent with asynchronous mergers of ancestral lines / S. Sagitov // *J. Appl. Probab.* – 1999. – V. 36. – P. 1116–1125.

[114] Sagitov S. Convergence to the coalescent with simultaneous multiple mergers / S. Sagitov // *J. Appl. Probab.* – 2003. – V. 40. – P. 839–854.

[115] Schweinsberg J. Coalescents with simultaneous multiple collisions / J. Schweinsberg // *Electron. J. Probab.* – 2000. – V. 5. – P. 1–50.

[116] Schweinsberg J. A necessary and sufficient condition for the Λ-coalescent to come down from infinity / J. Schweinsberg // *Electron. Comm. Probab.* – 2000. – V. 5. – P. 1–11.

[117] Schweinsberg J. The number of small blocks in exchangeable random partitions / J. Schweinsberg // *Alea* – 2010. – V. 7. – P. 217–242.

[118] Sedgewick R. The analysis of quicksort programs / R. Sedgewick // *Acta Informatika.* – 1977. – V. 7(4). – P. 327–355.

[119] Sgibnev M. On a renewal function when the second moment is infinite / M. Sgibnev // *Stat. Probab. Letters.* – 2009. – V. 79. – P. 1242–1245.

[120] Tavaré S. Ancestral inference in population genetics / S. Tavaré // *Springer Lecture Notes in Math.* – 2004. – V. 1837. – P. 1–188.

[121] van Cutsem B. Renewal-type behaviour of absorption times in markov chains / B. van Cutsem, B. Ycart // *Adv. Appl. Probab.* – 1994. – V. 26. – P. 988–1005.