Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О. В. МАРИНИЧ

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ЙМОВІРНІСНОГО АНАЛІЗУ АЛГОРИТМІВ

Курс лекцій

Київ, 2015

ЗМІСТ

Перелік позначень **4**

1 Елементи асимптотичного аналізу **5**

1.1 Асимптотичні ієрархії 5

1.2 Числа Бернуллі та формула Ейлера-Маклорена 15

1.2.1 Основні асимптотичні розклади 20

1.3 Ітеративні функції 23

2 Твірні функції, детерміновані рекурентні співвідношення та їх асимтпотичний аналіз **30**

2.1 Рекурсивно задані послідовності 30

2.2 Твірні функції 32

2.3 Лінійні рекурентні співвідношення скінченної глибини . . . 40

2.3.1 Постійні коефіцієнти 40

2.3.2 Змінні коефіцієнти 45

2.4 Лінійні рекурентні співвідношення нескінченної глибини . . 48

2.4.1 Метод ітеративних функцій 49

2.5 Репертуарний метод 54

2.6 Сингулярний аналіз твірних функцій 54

2.6.1 Експоненційний порядок та особливі точки твірних функцій 55

2.6.2 Сингулярний аналіз раціональних та мероморфних функцій 58

2.6.3 Сингулярний аналіз алгебраїко-логарифмічних функцій 64

3 Додатки 78

3.1 Додаток А. Дійсний аналіз 78

3.1.1 Теорема про неявну функцію 78

3.1.2 Формула Валліса 79

3.2 Додаток Б. Комплексний аналіз 79

3.3 Додаток В. Гамма функція 85

3.4 Додаток Г. Елементи теорії ймовірностей 87

3.4.1 Випадкові величини та їх розподіли 87

3.4.2 Типи збіжностей випадкових величин та їх розподілів 90

Бібліоґрафія 91

ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ

$:=$ – дорівнює за визначенням; покладемо;

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ – дійсна пряма $(-\infty, \infty)$;

$\overline{\mathbb{R}}$ – розширена дійсна пряма $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$;

$\mathbb{R}^+$ – невід'ємна півпряма $[0, \infty)$;

$\mathbb{C}$ – поле комплексних чисел;

$\overline{\mathbb{C}}$ – розширена комплексна площина;

$\mathbb{1}(A)$ – індикатор події A, тобто $\mathbb{1}(A) := \begin{cases} 1, & A \text{ виконується}, \\ 0, & \text{інакше}; \end{cases}$

$f(x) \succ g(x), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;

$f(x) \prec g(x), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

$f(x) \asymp g(x), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \underline{\lim}_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty$;

$f(x) \sim g(x), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$;

$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim}_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$;

$f(x) = o(g(x)), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

Розділ 1

Елементи асимптотичного аналізу

1.1 Асимптотичні ієрархії

Поняття «порядку росту» та «швидкості росту» послідовності дійсних чисел x_n при $n \to \infty$ або функції дійсного (чи комплексного) аргументу $f(x)$ при $x \to x_0$, де $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (чи $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$), є надзвичайно важливими як у самому аналізі, так і у його численних застосуванях, зокрема в математичному аналізі алгоритмів.

Функції, що зустрічаються у застосуваннях можуть мати різну «асимптотичну поведінку» при $x \to x_0$, або як кажуть у випадку $x_0 = \infty$ різну «асимптотичну швидкість росту». Ми казатимемо, що $f(x)$ «зростає швидше при $x \to x_0$», якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

і позначати це $f(x) \succ g(x), \;\; x \to x_0$. Аналогічно, $f(x)$ «зростає повільніше при $x \to x_0$», якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Це позначається так $f(x) \prec g(x), \;\; x \to x_0$. Зрозуміло, що

$$f(x) \succ g(x), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \prec f(x), \;\; x \to x_0.$$

Функції мають «однаковий порядок росту при $x \to x_0$», якщо

$$0 < \underline{\lim}_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \overline{\lim}_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty,$$

Таке відношення позначається $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to x_0$.

Зауваження 1.1.1. Надалі в цьому розділі, якщо явно не вказується протилежне, ми працюватимемо з дійснозначними функціями дійсного аргументу.

Зауваження 1.1.2. У більшості сформульованих нижче результатів припускається, що асимптотичні співвідношення виконуються для дійсних x, що прямують до $+\infty$. Зробивши заміни змінних $s = -x$, $s = \frac{1}{x}$ або $s = \pm\frac{1}{x-x_0}$ можна переформулювати ці результати для $x \to -\infty$, $x \to +0$ або $x \to x_0 \pm 0$ відповідно.

Зі стандартного курсу аналізу відоме співвідношення

$$x^\alpha \prec x^\beta, \;\; x \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta$$

а також, що для довільного $\alpha > 0$

$$e^x \succ x^\alpha, \;\; x \to +\infty,$$

та

$$\ln x \prec x^\alpha, \;\; x \to +\infty.$$

Використовуючи ці співвідношення та монотонність логарифмічної та показникової функцій можемо побудувати *асимтпотичні ієрархії* на зразок:

$$1 \prec \ln\ln x \prec (\ln x)^\varepsilon \prec (\ln x)^\rho \prec x^\varepsilon \prec x \prec x^\rho \prec x^{\ln x} \prec \rho^x \prec x^x \prec \rho^{\rho^x}$$

при $x \to +\infty$, де $0 < \varepsilon < 1 < \rho$. Маючи, наприклад, функцію $x \mapsto x(\ln x)^{-1}$ можна легко знайти її місце в такому ряді: $x^\varepsilon \prec x(\ln x)^{-1} \prec x$ при $x \to +\infty$.

Нехай задано довільну функцію ϕ таку, що $\phi(x) \succ 1$ при $x \to \infty$. Взявши $\phi(x)$ за основу, завжди можна побудувати асимптотичну ієрархію вигляду

$$\phi(x) =: \phi_1(x) \prec \phi_2(x) \prec \ldots \prec \phi_n(x) \prec \ldots,$$

при чому багатьма способами. Наприклад, можна покласти $\phi_n(x) := \phi^n(x)$ або визначити послідовність (ϕ_n) рекурсивно: $\phi_n(x) := \phi(\phi_{n-1}(x)), \;\; n \geq 2$.

У будь-якій асимптотичної ієрархії між довільними двома послідовними її членами завжди можна вставити новий, що випливає, наприклад, з імплікації

$$1 \prec f(x) \prec g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \prec \sqrt{f(x)g(x)} \prec g(x),$$

де всі співвідношення виконуються при $x \to +\infty$. Менш очевидний факт встановлюється такою теоремою.

Теорема 1.1.3 (Дюбуа-Реймон)**.** *Для довільної асимптотичної ієрархії монотонно зростаючих функцій*

$$\phi_1(x) \prec \phi_2(x) \prec \ldots \prec \phi_n(x) \prec \ldots, \quad x \to +\infty \tag{1.1}$$

існує функція f така, що зростає швидше за будь-яку функцію заданої ієрархії, тобто $\phi_n(x) \prec f(x)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Зрозуміло, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ маємо $\phi_{n+1}(x) \geq \phi_n(x)$ для всіх досить великих x. Побудуємо нову асимптотичну ієрархію

$$\psi_1(x) \prec \psi_2(x) \prec \ldots \prec \psi_n(x) \prec \ldots, \quad x \to +\infty$$

таку, що

(a) $\psi_n(x) = \phi_n(x)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $x > x_n$ для деякого x_n;

(b) $\psi_{n+1}(x) \geq \psi_n(x)$ *для всіх* x та n.

Покладемо $\psi_1(x) \equiv \phi_1(x)$ та припустимо, що вже побудовано послідовність $\psi_1(x) \prec \psi_2(x) \prec \ldots \prec \psi_n(x)$. Оскільки $\phi_{n+1}(x) \succ \phi_n(x)$ та $\phi_n(x) \sim \psi_n(x)$ при $x \to \infty$, то $\phi_{n+1}(x) \succ \psi_n(x)$, а тому знайдеться x_{n+1} таке, що $\phi_{n+1}(x) \geq \psi_n(x)$ для $x > x_{n+1}$. Покладемо

$$\psi_{n+1}(x) := \begin{cases} \phi_{n+1}(x), & x > x_{n+1}, \\ \max\{\phi_{n+1}(x), \psi_n(x)\}, & x \leq x_{n+1}. \end{cases}$$

Побудована послідовність очевидно задовольняє властивостям (a) та (b), а всі її члени є неспадними функціями. Нехай $f(n) := \psi_n(n)$ при $n \in \mathbb{N}$,

з'єднавши точки $(n, \psi_n(n))$ підхожим чином побудованими дугами або прямими лініями, отримаємо неперервну зростаючу функцію f, яка задовольняє подвійну нерівність

$$\psi_n(x) \le f(x) \le \psi_{n+1}(x), \quad n \le x \le n+1.$$

З цієї нерівності маємо

$$\frac{f(x)}{\psi_n(x)} \ge \frac{\psi_{n+1}(x)}{\psi_n(x)}, \quad x \ge n+1,$$

а отже $f(x) \succ \psi_n(x)$ при $x \to \infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Доведення завершено. $\square$

У багатьох випадках функції однієї дійсної зміної, що виникають у застосуваннях, будуються за допомогою скінченної кількості стандартних алгебраїчних операцій $(+, -, \times, \div)$ та скінченної кількості операцій потенціювання й логарифмування, як наприклад функція $x \mapsto x^{\alpha} e^{\beta x^{\gamma} e^{\delta x^{\varepsilon}}} + \sigma x \ln\ln(\zeta x + \eta e^{\rho x})$.

В роботі [6] Харді ввів важливе поняття — *клас логарифмічно-експоненційних функцій.* Цей клас можна визначити (див. [13]) рекурсивно, як найменшу родину $\mathcal{L}$ функцій, яка задовольняє таким властивостям:

- для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$ функція $f(x) \equiv \alpha$ лежить в $\mathcal{L}$;
- тотожня функція $f(x) = x$ лежить в $\mathcal{L}$;
- якщо $f, g \in \mathcal{L}$. то $f - g \in \mathcal{L}$;
- якщо $f \in \mathcal{L}$, то $e^f \in \mathcal{L}$;
- якщо $f \in \mathcal{L}$ та $f(x) > 0$ для всіх $x > x_0$ для деякого $x_0 \in \mathbb{R}$, то $\ln f \in \mathcal{L}$.

Зауваження 1.1.4. Нехай $f, g \in \mathcal{L}$. З рівностей $f + g = f - (0 - g)$, $fg = e^{\ln f + \ln g}$, $f/g = e^{\ln f - \ln g}$, $f^{\alpha} = e^{\alpha \ln f}$ випливає, що $f + g \in \mathcal{L}$, $fg \in \mathcal{L}$, $f/g \in \mathcal{L}$ та $f^{\alpha} \in \mathcal{L}$, відповідно.

Основний результат про логарифмічно-експоненційний клас стверджує, що будь-які дві функції з $\mathcal{L}$ асимптотично порівнювані. Більш точно, має місце така теорема.

Теорема 1.1.5. *Довільна функція $f \in \mathcal{L}$ для досить великих x є неперервною, монотонною та зберігає знак. При $x \to +\infty$ функція $f(x)$ прямує до границі, яка може дорівнювати $\pm\infty$. Якщо $f, g \in \mathcal{L}$ то, при $x \to \infty$, має місце одна з трьох альтернатив :*

$$f(x) \succ g(x) \text{ або } f(x) \prec g(x) \text{ або } f(x) \sim \alpha g(x), \quad x \to +\infty.$$

для деякої константи $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Доведення. Назвемо дійснозначну функцію $y = f(x)$ дійсного аргументу алгебраїчною, якщо вона є розв'язком поліноміального рівняння вигляду

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_0(x) = 0,$$

де $a_i(x)$ є поліномами від x. Зауважимо, що всі функції, побудовані з тотожної функції $y = x$ та дійсних констант, застосуванням скінченної кількості операцій $+, -, \times, \div$, а також операції добування кореня цілого степеня є алгебраїчними функціями. Проте, як випливає з відомих теорем Абеля та Галуа про нерозв'язність в загальному випадку в радикалах алгебраїчних рівнянь порядку ≥ 5, клас алгебраїчних функцій ширший.

Зрозуміло, що алгебраїчні функції утворюють власну підмножину $\mathcal{L}$, назвемо їх $\mathcal{L}$-функціями нульового порядку. Казатимемо, що f є $\mathcal{L}$-функцією першого порядку, якщо аргументами функцій $\exp(\cdot)$ та $\ln(\cdot)$, що входять в f, є алгебраїчні функції; що f є $\mathcal{L}$-функцією другого порядку, якщо аргументами $\exp(\cdot)$ та $\ln(\cdot)$ є $\mathcal{L}$-функції першого порядку або алгебраїчні функції і т.д. Таким чином, функція

$$f(x) = x^{x^x} = e^{\ln x e^{x \ln x}}$$

є $\mathcal{L}$-функцією третього порядку.

Очевидно, що твердження теореми виконується для алгебраїчних функцій, тому доведення першої її першої частини можна провести індукцією за порядком функції, а саме, достатньо довести: якщо довільна $\mathcal{L}$-функція порядку $n-1$ є неперервною, монотонною та зберігає знак для достатньо великих x то ці ж властивості має довільна $\mathcal{L}$-функція порядку n. Далі, оскільки похідна $\mathcal{L}$-функції порядку n є $\mathcal{L}$-функцією порядку n (або нижче), то достатньо перевірити, що зі справделивості теореми для $\mathcal{L}$-функцій порядку $n-1$ випливає, що $\mathcal{L}$-функція порядку n є неперервною та зберігає знак з деякого місця[1]. Нарешті, оскільки частка двох функцій з $\mathcal{L}$ лежить в $\mathcal{L}$, то друга частина теореми (про асимптотичну порівнюваність) є наслідком першої частини.

Довільна $\mathcal{L}$-функція f_n порядку n може бути представлена у вигляді

$$\begin{aligned} f_n &= A\Big(\exp(\phi_{n-1}^{(1)}),\ldots,\exp(\phi_{n-1}^{(r)}),\ln\psi_{n-1}^{(1)},\ldots,\ln\psi_{n-1}^{(s)},\chi_{n-1}^{(1)},\ldots,\chi_{n-1}^{(t)}\Big)\\ &= A\Big(z_1,z_2,\ldots,z_q\Big), \end{aligned}$$

де $q=r+s+t$, всі функції з нижнім індексом $n-1$ є $\mathcal{L}$-функціями порядку $n-1$, а A є деякою алгебраїчною функцією. Таким чином, має місце рівність

$$M_0 f_n^p + M_1 f_n^{p-1} + \ldots + M_p = 0,$$

де коефіцієнти M_j є поліномами по змінним $z_1, z_2, \ldots, z_q$ і належать класу функцій вигляду

$$M = \sum \rho_{n-1}\exp(\sigma_{n-1})(\ln\tau_{n-1}^{(1)})^{\kappa_1}(\ln\tau_{n-1}^{(2)})^{\kappa_2}\cdots(\ln\tau_{n-1}^{(h)})^{\kappa_h}, \tag{1.2}$$

де $\kappa_i\in\mathbb{N}$, число доданків скінченне, а функції з нижнім індексом $n-1$, як і раніше, позначають $\mathcal{L}$-функції порядку $n-1$. Припустимо, що твердження теореми виконується для функцій вигляду (1.2). Тоді за теоремою про неявну функцію (див. теорему 3.1.1 в Додатку А) f_n є неперервною. Оскільки з рівності $f_n(x)=0$ випливає $M_p(x)=0$, то f_n повинна зберігати знак для великих x. Отже, залишається встановити твердження теореми для функцій вигляду (1.2).

[1]Монотонність випливатиме зі знакосталості похідної.

Назвемо суму $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_h$ степенем доданка в (1.2). Позначимо найвищий степінь в сумі (1.2) λ і вважатимемо, що в M є μ доданків степеня λ. Оскільки функції $\exp(\cdot)$ та $\ln(\cdot)$ є неперервними[2], а функції $x \mapsto \tau_{n-1}^{(i)}(x)$ не обертаються в нуль для великих x за припущенням індукції, то M є неперервною для великих x.

Нехай $\tilde{\rho}_{n-1}\exp(\tilde{\sigma}_{n-1})(\ln\tilde{\tau}_{n-1}^{(1)})^{\kappa_1}(\ln\tilde{\tau}_{n-1}^{(2)})^{\kappa_2}\cdots(\ln\tilde{\tau}_{n-1}^{(h)})^{\kappa_h}$ — один з членів степеня λ, що входить в M. Якщо M обертається в нуль на послідовності, що прямує до нескінченності, то це вірно й для функції

$$x \mapsto M/(\tilde{\rho}_{n-1}\exp(\tilde{\sigma}_{n-1})),$$

а отже, за теоремою Ролля, й для її похідної. Ця похідна знову є функцією вигляду (1.2) й до того ж вона містить щонайбільше $\mu - 1$ доданок степеня λ. Диференціюючи потрібну кількість разів, ми отримаємо функцію вигляду

$$N = \sum \rho_{n-1}\exp(\sigma_{n-1}),$$

яка вже не містить множників $\ln(\tau_{n-1})$ і яка повинна обертатись в нуль на послідовності чисел, що прямує до нескінченності. Покажемо, що це суперечить припущенню індукції. Нехай число доданків, які входять в N, дорівнює ω. Тоді з міркувань, аналогічних наведеним вище, випливає, що $(N/(\rho_{n-1}\exp(\sigma_{n-1})))'$ має обертатись в нуль на послідовності, що прямує до нескінченності. Проте, функція

$$x \mapsto N/(\rho_{n-1}\exp(\sigma_{n-1})))'$$

має такий самий вигляд як і N, але містить вже $\omega - 1$ доданок. Продовжуючи диференціювати, приходимо до висновку, що функція вигляду

$$x \mapsto \rho_{n-1}\exp(\sigma_{n-1})$$

має обертатись в нуль на послідовності, що прямує до нескінченності, що суперечить припущенню індукції. Теорема доведена. □

[2] $x \mapsto \ln x$ є неперервною для $x > 0$

Зауваження 1.1.6. З доведення зрозуміло, що твердження теореми вірне для ширшого класу функцій, а не лише тих, що утворенені елементарними операціями, а також логарифмуванням та потенціюванням. Наприклад, для функції $x \mapsto \exp(\sqrt{\ln y})$, де $y = y(x)$ — неявна функція, що задається рівнянням $y^5 + y - x = 0$, всі твердження теореми є вірними. Проте, з точки зору застосувань, наведене вище означення логарифмічно-експоненційного класу цілком достатнє.

Символи Ландау. У асимптотичному аналізі напрочуд корисним виявились введені у 1894 р. П. Бахманом і згодом популяризовані Е. Ландану символи $\mathcal{O}$ та o.

Означення 1.1.7. Нехай (в загальному випадку комплексно-значні) функції f, g визначені в околі деякої точки $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тоді:

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ при $x \to x_0$, якщо знайдеться такий окіл U точки x_0 та константа $C > 0$, що $|f(x)| \leq C|g(x)|$ для всіх $x \in U$, $x \neq x_0$.

$f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий окіл U_ε точки x_0, що $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ для всіх $x \in U$, $x \neq x_0$.

$f(x) = \Omega(g(x))$ при $x \to x_0$, якщо знайдеться такий окіл U точки x_0 та константа $C > 0$, що $|f(x)| \geq C|g(x)|$ для всіх $x \in U$, $x \neq x_0$.

$f(x) = \Theta(g(x))$ при $x \to x_0$, якщо $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ та $f(x) = \Omega(g(x))$ при $x \to x_0$.

Наприклад, при $n \to \infty$ маємо

$$\sqrt{n} = \mathcal{O}(n), \quad \sin n = o(\ln n), \quad n^n = \Omega(n!), \quad n + \sin(n) = \Theta(n);$$

а, при $x \to 0$ виконується

$$\sqrt{x} = o(1), \quad e^x = O(\sin x/x), \quad \ln(1 + x) = \Theta(x).$$

Зрозуміло, що співвідношення $f(x) = o(g(x))$ (відповідно, $f(x) = \Theta(x)$) при $x \to x_0$ еквівалентно $f(x) \prec g(x)$ (відповідно, $f(x) \asymp g(x)$) при $x \to x_0$.

Зауважимо, що використовуючи символи Ландау, завжди слід пам'ятати з якої множини беруться аргументи функцій, що входять у асимптотичні співідношення. Так звичне з дійсного аналізу співвідношення

$$\sin x = O(1), \quad x \to \infty, \quad x \in \mathbb{R}$$

вже не виконуватиметься якщо x прямує до нескінченності, набуваючи комплексних значень (візьмемо $x = \mathrm{i}n$, $n \in \mathbb{N}$).

Теорема 1.1.8. *Символ Ландау $\mathcal{O}$ задовольняє таким співвідношенням:*

- $f(x) = \mathcal{O}(f(x))$ *при* $x \to x_0$*;*
- $cf(x) = \mathcal{O}(f(x))$ *при* $x \to x_0$ *та* $c \in \mathbb{C}$*;*
- $\mathcal{O}(f(x))\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(f(x)g(x))$ *при* $x \to x_0$*;*
- $\mathcal{O}(f(x)g(x)) = f(x)\mathcal{O}(g(x))$ *при* $x \to x_0$*;*
- $\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(|f(x)| + |g(x)|)$ *при* $x \to x_0$*;*
- $\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(f(x))$ *при* $x \to x_0$*, якщо* $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$*.*

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з означення $\mathcal{O}$. Доведемо, наприклад третю властивість. Нехай $f_1(x) = \mathcal{O}(f(x))$ та $g_1(x) = \mathcal{O}(g(x))$, тоді знайдуться константи C_1, D_1 та околи U_1, V_1, що

$$|f_1(x)| \le C_1|f(x)|, \quad x \in U_1, \quad x \ne x_0,$$
$$|g_1(x)| \le D_1|g(x)|, \quad x \in V_1, \quad x \ne x_0,$$

а отже

$$|f_1(x)g_1(x)| \le C_1D_1|f(x)g(x)|, \quad x \in U_1 \cap V_1, \quad x \ne x_0,$$

що означає $f_1(x)g_1(x) = \mathcal{O}(f(x)g(x))$ при $x \to x_0$. □

Нехай задана асимптотична ієрархія $\Phi = (\phi_j)_{j\ge 0}$ в околі токи $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$:

$$\phi_0(x) \prec \phi_1(x) \prec \cdots \phi_n(x) \prec \cdots, \quad , x \to x_0. \tag{1.3}$$

Означення 1.1.9. Функція f допускає асимптотичний розклад в околі точки x_0 відносно ієрархії Φ, якщо існують такі константи $(\lambda_j)_{j\geq 0}$, що для кожного фіксованого $m \in \mathbb{N}_0$ має місце представлення

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \phi_j(x) + \mathcal{O}(\phi_{m+1}(x)), \quad x \to x_0. \tag{1.4}$$

Якщо співвідношення (1.4) виконується то писатимемо

$$f(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \phi_j(x), \quad x \to x_0.$$

Зауважимо, що ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \phi_j(x)$ може бути розбіжним для деяких або й для всіх x, тому асимптотичне співвідношення $f(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \phi_j(x)$ слід інтерпретувати саме у сенсі (1.4) і не плутати з визначенням асимптотичної еквівалентності.

Приклад 1.1.10. Розглянемо функцію

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{x+k},$$

де $0 < c < 1$. Цей ряд рівномірно збіжний при $x \geq 0$ за мажорантною ознакою Веєрштрасса, а отже задає неперервну функцію. Для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$ та для всіх $x > k$ маємо

$$\frac{1}{x+k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} k^{j-1}}{x^j}.$$

Якби ми мали право розкласти кожний дріб $1/(x+k)$ у такий спосіб[3] і підставити ці розклади у ряд, що задає $f(x)$, ми формально отримали б

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} k^{j-1}}{x^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{x^j},$$

[3]Цього зробити не можна, оскільки $k \geq x$ для всіх доданків, починаючи з деякого місця.

де $A_j := (-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{\infty} k^{j-1}c^k$. Але це незаконно і ряд $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j}{x^j}$ розбіжний для всіх $x > 0$. Проте, якщо у наведеній формулі знак «дорівнює» замінити знаком «є асимптотичним розкладом відносно ієрархії $(x^{-j})_{j\in\mathbb{N}}$» при $x \to \infty$:

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j}{x^j}, \quad x \to \infty,$$

то вона стане правильною. Дійсно, якщо покласти $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{x^j}$, то

$$S_n(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{x^j} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}c^k\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{-k}{x}\Big)^{j-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-\Big(-\frac{k}{x}\Big)^n\Big)\frac{c^k}{x+k},$$

а отже

$$|f(x)-S_n(x)| \;=\; \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{k}{x}\Big)^n\frac{c^k}{x+k}\Big| < \frac{1}{x^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}k^nc^k = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^{n+1}}\Big),$$

осклільки $\sum_{k=1}^{\infty}k^nc^k < \infty$.

1.2 Числа Бернуллі та формула Ейлера-Маклорена

Розглянемо функцію $\phi(z) = \frac{z}{e^z-1}$, яка визначена для всіх комплексних $z \neq 0$ та покладемо за неперервністю $\phi(0) = 1$. З представлення

$$\phi(z) = \frac{1}{1+\psi(z)},$$

де функція $\psi(z) := \sum_{k=2}^{\infty}z^{k-1}/k!$ є аналітичною та $\psi(0) = 0$ випливає, що ϕ аналітична в початку координат, а отже представляється рядом Тейлора

$$\phi(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}z^n, \tag{1.5}$$

де $B_n := \phi^{(n)}(0)$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Числа B_n називаються *числами Бернуллі.*

Лема 1.2.1. *Послідовність* (B_n) *задовольняє рекурентне співвідношення:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = \mathbb{1}(n=0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.6}$$

зокрема $B_0 = 1, B_1 = -1/2$. *При* $n \in \mathbb{N}$ *маємо* $B_{2n+1} = 0$.

Доведення. Домноживши рівність (1.5) на $e^z - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! - 1$ та перемноживши ряди, отримаємо

$$z = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\Big) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} - \frac{B_n}{n!}\Big) z^n.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z та домножуючи на $n!$, маємо

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k - B_n = n!\mathbb{1}(n=1), \quad n \in \mathbb{N},$$

що перетворюється у (1.6) після підстановки $n \to n+1$.

Додамо до лівої й правої частини рівності (1.5) дріб $-zB_1 = z/2$:

$$\phi(z) + z/2 = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}.$$

Звідси очевидно, що функція $z \mapsto \phi(z) + z/2$ парна, а тому $B_{2n+1} = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Доведення завершено. □

Числа Бернуллі виникли при аналізі степеневих сум

$$S_m(n) := \sum_{k=0}^{n-1} k^m, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

окремими випадками яких є:

$$\begin{aligned} S_0(n) &= n, \\ S_1(n) &= n^2/2 - n/2, \\ S_2(n) &= n^3/3 - n^2/2 + n/6. \end{aligned}$$

Виявляється, що для довільного $m \in \mathbb{N}_0$ сума $S_m(n)$ є поліномом по n степеня $m+1$, а його коефіцієнти виражаються через числа Бернуллі.

Твердження 1.2.2. *Для всіх $m \in \mathbb{N}_0$ та $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність*

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}. \tag{1.7}$$

Доведення. Доведемо спочатку формулу

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}S_j(n) = n^{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Використавши біном Ньютона, маємо

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}S_j(n) &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}\sum_{k=0}^{n-1}k^j = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j}k^j \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)^{m+1} - k^{m+1}) = n^{m+1},\end{aligned}$$

що доводить (1.8).

Позначимо праву частину рівності (1.7) через $T_m(n)$. Враховуючи формулу (1.8), маємо

$$\begin{aligned}T_m(n) &= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k\sum_{j=0}^{m-k}\binom{m+1-k}{j}S_j(n) \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_j(n)}{j!}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}\frac{(m+1-k)!}{(m+1-k-j)!}B_k \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_j(n)}{j!}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k-j)!}B_k \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_j(n)(m+1)!}{j!(m+1-j)!}\sum_{k=0}^{m-j}\frac{(m+1-j)!}{k!(m+1-k-j)!}B_k \\ &= \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{S_j(n)(m+1)!}{j!(m+1-j)!}\mathbb{1}(m=j) = S_m(n),\end{aligned}$$

де передостання рівність отримана з (1.6). Доведення завершено. □

На основі чисел Бернуллі побудований один з ключових результатів дійсного асимптотичного аналізу — формула сумування Ейлера-Маклорена. Нехай $f \in C^{(m)}([a,b])$, $0 \le a < b$, $a, b, \in \mathbb{N}$ та $m \in \mathbb{N}$, тоді

формула Ейлера-Маклорена має вигляд:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m, \tag{1.9}$$

де

$$R_m := (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\mathrm{d}x$$

та $B_m(x)$ — m-ий многочлен Бернуллі, що визначається рівністю

$$B_m(x) := \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k x^{m-k}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Формула (1.9) дає строге обгрунтування еврістичної апроксимації $\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$. Понад те, вона дає асимптотичні члени «меншого порядку» $\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(b))$ та явний вигляд абсолютної похибки R_m.

Перш ніж переходити до доведення (1.9), подивимось як ця формула виглядає для $f(x) = x^{m-1}$. Маємо $f^{(m)}(x) \equiv 0$, а отже

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a}^{b-1} k^{m-1} &= \int_a^b x^{m-1}\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!}(m-1)\cdots(m-k+1)(b^{m-k} - a^{m-k}) \\
&= \frac{b^m - a^m}{m} + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} B_k (b^{m-k} - a^{m-k}) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k (b^{m-k} - a^{m-k}).
\end{aligned}$$

З огляду на формулу (1.7) останній вираз дорівнює $S_{m-1}(b) - S_{m-1}(a)$, як і повинно бути.

Доведення формули (1.9). Доведемо спочатку індукцією по m окремий випадок формули (1.9) при $a = 0$ та $b = 1$:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1 - (-1)^m \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)\mathrm{d}x. \tag{1.11}$$

При $m = 1$ маємо перевірити рівність:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) + \int_0^1 (x - 1/2) f'(x)\mathrm{d}x, \tag{1.12}$$

де множник $x-1/2$ — це перший поліном Бернуллі $B_1(x)$ (див. формулу (1.10)). Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-1/2)f'(x)\mathrm{d}x &= (x-1/2)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

що доводить (1.12).

Нехай формула (1.11) вірна для $m=l-1$, покажемо що вона вірна при $m=l$. Маємо за припущенням індукції

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{l} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1 + R_l \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1 + R_{l-1} + \Big[R_l - R_{l-1} + \frac{B_l}{l!} f^{(l-1)}(x)\Big|_0^1\Big] \\ &= f(0) + \Big[R_l - R_{l-1} + \frac{B_l}{l!} f^{(l-1)}(x)\Big|_0^1\Big].\end{aligned}$$

Отже, достатньо показати, що вираз в квадратних дужках дорівнює нулю, тобто потрбіно перевірити рівність

$$(-1)^l B_l(f^{(l-1)}(1) - f^{(l-1)}(0)) = l\int_0^1 B_{l-1}(x)f^{(l-1)}(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 B_l(x)f^{(l)}(x)\mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

З цією метою помітимо, що з огляду на визначення (1.10) поліномів Бернуллі:

$$B_l'(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l}{k}(l-k)B_k x^{l-k-1} = l\sum_{k=0}^{l-1}\binom{l-1}{k} B_k x^{l-k-1} = lB_{l-1}(x),$$

а отже, інтегруючи частинами,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 B_l(x)f^{(l)}(x)\mathrm{d}x \\ &\qquad = B_l(1)f^{(l-1)}(1) - B_l(0)f^{(l-1)}(0) - \int_0^1 f^{(l-1)}(x)B_l'(x)\mathrm{d}x \\ &\qquad = B_l(1)f^{(l-1)}(1) - B_l(0)f^{(l-1)}(0) - l\int_0^1 f^{(l-1)}(x)B_{l-1}(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Звідси ми бачимо, що (1.13) еквівалентно

$$(-1)^l B_l = B_l(1) = B_l(0), \quad l > 1, \tag{1.14}$$

але

$$B_l(1) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} B_k = B_l = B_l(0) = B_l = (-1)^l B_l,$$

де друга рівність є наслідком (1.6), а остання є вірною оскільки $B_l = 0$ при непарних $l > 1$.

Таким чином, формула (1.11) доведена. Замінивши в цій формулі функцію $f(x)$ на $f(x+j)$ для довільного цілого j, отримаємо

$$f(j) = \int_j^{j+1} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{j} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_l^{l+1} - (-1)^m \int_j^{j+1} \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\mathrm{d}x,$$

звідки загальна формула Ейлера-Маклорена (1.9) отримується сумуванням по всім $j = a, a+1, \ldots, b-1$. □

1.2.1 Основні асимптотичні розклади

Гармонічні числа. Як відомо з курсу аналізу, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається. Часткові суми цього ряду називаються гармонічними числами, а їх стандартне позначення — H_n, таким чином

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Формула Ейлера-Маклорена дає змогу отримати дуже точний асимтпотичний розклад H_n. Застосуємо формулу (1.9) з $a = 1$, $b = n$, $f(x) = 1/x$ та непарним m (тобто писатимемо $2m+1$ замість m). Оскільки

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}, \quad x > 0,$$

то

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} + \sum_{k=1}^{2m+1}\frac{B_k}{k!}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\Big|_1^n \\
&+ \int_1^n \frac{B_{2m+1}(\{x\})}{(2m+1)!}\frac{(-1)^{2m+1}(2m+1)!}{x^{2m+2}}\mathrm{d}x \\
&= \ln n + \sum_{k=1}^{2m+1}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{k}\Big(\frac{1}{n^k}-1\Big) - \int_1^n \frac{B_{2m+1}(\{x\})}{x^{2m+2}}\mathrm{d}x \\
&= \ln n + C + \frac{B_1}{n} - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + \int_n^\infty \frac{B_{2m+1}(\{x\})}{x^{2m+2}}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

де $C := \sum_{k=1}^{2m+1}\frac{(-1)^k B_k}{k} - \int_1^\infty \frac{B_{2m+1}(\{x\})}{x^{2m+2}}\mathrm{d}x$. Зауважимо, що останній інтеграл збіжний, оскільки підінтегральна функція є $\mathcal{O}(x^{-(2m+2)})$ при $x\to\infty$ в силу $\sup_{x\ge 1}|B_{2m+1}(\{x\})| = \sup_{x\in[0,1]}|B_{2m+1}(x)| < \infty$.

Зрозуміло, що константа C дорівнює також $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)$, вона називається константою Ейлера-Маскероні і наближено дорівнює $C \approx 0.5772156649$.

З вищенаведених обчислень та рівності $B_1 = -1/2$ випливає, що

$$H_n = \ln n + C + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + \mathcal{O}(n^{-(2m+1)}), \quad n\to\infty,$$

оскільки має місце тривіальна оцінка

$$\Big|\int_n^\infty \frac{B_{2m+1}(\{x\})}{x^{2m+2}}\mathrm{d}x\Big| \le \sup_{x\ge 1}|B_{2m+1}(\{x\})|\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{2m+2}} = \mathcal{O}(n^{-(2m+1)}).$$

Більш ретельний аналіз залишкого члена дозоляє уточнити $\mathcal{O}$-оцінку та отримати стандартну форму асимптотичного розкладу гармонічних чисел:

$$H_n = \ln n + C + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} + \mathcal{O}(n^{-(2m+2)}), \quad n\to\infty. \tag{1.15}$$

Факторіал та біноміальні коефіцієнти. За допомогою формули Ейлера-Маклорена можна отримати відому *апроксимацію Стірлінга* для

факторіалу. Запишемо

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k + \ln n.$$

Для першого доданку маємо за формулою Ейлера-Маклорена з $a = 1$, $b = n$ та $f(x) = \ln x$, по аналогії з формулою для апроксимації гармонічних чисел,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = n \ln n - n + \sigma - \frac{\ln n}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)n^{2k-1}} - \int_n^\infty \frac{B_{2m+1}(\{x\})}{2m+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2m+1}},$$

де σ — деяка константа (її можна означити як границю $\lim_{n\to\infty}(\ln n! - n \ln n + n - \ln n/2)$). Знайдемо цю константу. Покладемо $a_n := \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$, тоді $e^\sigma = \lim_{n\to\infty} a_n$ та

$$n! = \sqrt{n} n^n e^{-n} a_n. \tag{1.16}$$

З формули Валліса (див. Додаток 3.1.2) випливає

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Підставляючи замість факторіалів представлення (1.16), отримаємо

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n n n^{2n} e^{-2n} a_n^2}{\sqrt{2n}(2n)^{2n} e^{-2n} a_{2n} \sqrt{2n+1}} = \frac{e^\sigma}{2},$$

тому $\sigma = \ln \sqrt{2\pi}$. Остаточно, отримаємо формулу Стірлінга

$$\ln n! = n \ln n - n + \sigma + \frac{\ln n}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)n^{2k-1}} + \mathcal{O}(n^{-2m}), \quad n \to \infty, \tag{1.17}$$

або, потенціюючи та беручи лише головний член розкладу,

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big), \quad n \to \infty. \tag{1.18}$$

Формулу Стірлінга можна затсосувати для знаходження асимптотики біноміальних коефіцієнтів для великих значень їх аргументів. Наприклад, має місце асимптотичне співвідношення

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{pin}}, \quad n \to \infty.$$

1.3 Ітеративні функції

При аналізі рекурентних співвідношень нескінченної глибини (такі співвідношення будуть розглядатись нижче, див. секцію 2.4) можуть виникати функції, які не належать стандартним класам (наприклад, логарифмічно-експоненційному класу чи взагалі, класу аналітичних функцій). Поняття ітеративної функції, яке буде розглянуто в цьому підрозділі, розширює клас функцій, за якими можна будувати асимтпотичні розклади, воно виявилось досить ефективним інструментом асимптотичного аналізу лінійних рекуретних співвідношень типу «поділяй-та-володарюй», які повсякчас виникають в аналізі алгоритмів.

У подальшому запис $g^{\circ(i)}(x)$ позначає i-ту суперпозицію функції g з собою, тобто $g^{\circ(0)}(x) = x$ та $g^{\circ(i)}(x) = g^{\circ(i-1)}(g(x))$, $i \in \mathbb{N}$.

Означення 1.3.1. Нехай функція $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є зростаючою необмеженою неперервною, та для деякого $x_0 > 0$ та довільного $x_1 > x_0$ існує $\varepsilon_{x_1} > 0$ таке, що

$$x - g(x) > \varepsilon_{x_1} \quad \text{для всіх} \quad x \in (x_0, x_1). \tag{1.19}$$

Припустимо, що функції $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ та $k : [0, x_0] \to \mathbb{R}$ є неперервними на області визначення та визначимо функцію $g^* : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таким чином

$$g^*(x) = \sum_{i=1}^{m_0(x)} h(g^{\circ(i-1)}(x)) + k(g^{\circ(m_0(x))}(x)), \tag{1.20}$$

де

$$m_0(x) := \inf\{k \geq 0 : g^{\circ(k)}(x) \leq x_0\}.$$

Функція g^* називається *ітеративною функцією породженою четвіркою* (h, g, x_0, k) та позначається $g^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$.

Зауважимо, що умова (1.19) є достатньою для того, щоб величина $m_0(x)$ була скінченною для довільного $x \in \mathbb{R}^+$. Це випливає з оцінки $m_0(x) \leq \lfloor \frac{x - x_0}{\varepsilon_x} \rfloor + 1$, яка випливає з нерівності

$$x - k\varepsilon_x > g^{\circ(k)}(x), \quad x > x_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

яка доводиться по індукції.

Зауваження 1.3.2. З означення випливає, що g^* задовольняє функціональному рівнянню

$$g^*(x) \;=\; h(x) + g^*(g(x)), \quad x > x_0, \tag{1.21}$$

з початковою умовою

$$g^*(x) \;=\; k(x), \quad x \le x_0.$$

Легко бачити, що остання рівність та формула (1.21) визначають функцію g^* однозначно.

Наведемо декілька прикладів ітеративних функцій.

Приклад 1.3.3. Нехай $h(x) \equiv 1$, $g(x) = \alpha x$, $\alpha \in [0,1)$, $x_0 = 1$, $k(x) \equiv 0$. Тоді $g^*(x) = 1 + g^*(\alpha x)$ при $x > 1$ та $g^*(x) = 0$ при $x \in [0,1]$. Розв'язком цього функціонального рівняння є

$$g^*(x) = \lceil \ln_{\frac{1}{\alpha}} x \rceil, \quad x > 1.$$

Перед формулюванням наступного прикладу нагадаємо визначення елементарної функції. Під елементарною фунцією ми розуміємо функцію, що побудована з "базових" функцій (константи $x \mapsto c \in \mathbb{R}$; степені $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; експоненти $x \mapsto a^x$, $a > 0$; логарифми $x \mapsto \ln_a x$, $a > 0, a \neq 1$; тригонометричні функції $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto \cot x$ та їх обернені) з використанням скінченної кількості елементарних операцій $(+, -, \times, \div)$ та суперпозицій.

Приклад 1.3.4. Нехай f – довільна елементарна, неперервна на $[0, +\infty)$, необмежена функція, строго зростаюча на $[x_0, +\infty)$ для деякого $x_0 > 0$. З очевидної рівності

$$f(x) = 1 + f(f^{-1}((f(x) - 1)), x > f^{-1}(x_0 + 1)$$

випливає, що функція $f(\cdot)$ є ітеративною функцією породженою четвіркою $(1, f^{-1}((f(x) - 1), x_0, f(x))$.

Зауваження 1.3.5. Зокрема, всі необмежені функції з логарифмічно-екпоненційного класу (див. підрозділ 1.1) є ітеративними.

Приклад 1.3.6. Нехай $h(x) \equiv 1$, $g(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $k(x) \equiv 0$. Тоді $g^*(x) = 1 + g^*(\ln x)$, $x > 1$, або $g^*(x) = \ln^* x$ – функція *«лог-зірочка»*, яка є, напевно, найбільш відомою нетривіальною ітеративною функцією. Очевидною є рівність $\mathrm{Iter}(1, g, x_0, 0) = m_0(x)$, яка виконується, зокрема, для «лог-зірочка»-функції.

Якщо $h(x_0) \neq 0$, то ітеративна функція $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, 0)$ є кусково-неперервною. З аналітичної точки зору значно зручніше працювати з гладкими ітеративними функціями, що і стало причиною введення функції k в означенні 1.3.1. Виявляється, що за досить загальних припущень на k, функції $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, 0)$ та $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$ мають однакову асимптотичну поведінку, а тому ми маємо змогу обирати функцію k, так щоб $\mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$ була достатньо гладкою. Нижче ми формалізуємо це твердження та опишемо, як будувати функцію k.

Введемо відношення еквівалентності $\approx$ на множині ітеративних функцій за правилом

$$g_1^* \approx g_2^* \Longleftrightarrow g_1^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k_1), \quad g_2^* = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k_2)$$

для деяких функцій k_1 та k_2. Це відношення породжує розбиття множини ітеративних функцій на класи еквівалентності (фактор-класи).

Означення 1.3.7. Клас еквівалентності

$$\mathcal{F} := \{F = \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k), k \in C[0, x_0]\}$$

називається *ітеративною функцією породженою трійкою* (h, g, x_0). Якщо це не викликатиме неоднозначності, ми називатимемо *ітеративною функцією породженою трійкою* (h, g, x_0) довільний елемент класу.

Оскільки $|g_1^*(x) - g_2^*(x)|$ є обмеженою величиною на $\mathbb{R}^+$ для довільних функцій $g_1^*, g_2^* \in \mathcal{F}$, то всі функції з одного класу еквівалентності є асимптотично еквівалентними (якщо вони розбігаються до $+\infty$).

Означення 1.3.8. *m-раз диференційовною модифікацією* ітеративної функції g^* називається довільна ітеративна функція $\hat{g}^*$ така, що $\hat{g}^* \approx g^*$ та $\hat{g}^* \in C^{(m)}[x_0, +\infty)$.

Наступна лема показує, що для диференційовності ітеративної функції, що породжена гладкими функціями f, g, k, на її області визначення, достатньо її диференційовності в точці x_0.

Лема 1.3.9. *Припустимо, що $g, h, k \in C^{(m)}[x_0, +\infty)$ та $F := \mathrm{Iter}(h, g, x_0, k)$ є m-раз диференційовною в точці x_0. Тоді F є m-раз диференційовною на множині $[x_0, +\infty)$.*

Доведення. Для заданої строго зростаючої неперервної функції g, існує єдина обернена функція g^{-1}. Ця функція визначає послідовність $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ таким чином

$$A_0 = 0, \quad A_i := (g^{-1})^{\circ(i-1)}(x_0), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Ми розглянемо випадок $m = 1$, для $m = 2, 3, \ldots$ доведення аналогічне. Оскільки F є сумою суперпозицій функцій з $C^{(1)}[x_0, +\infty)$, то вона є диференційовною на $[x_0, +\infty)\backslash(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Отже, ми повинні перевірити неперервність та диферецiйовність лише у точках $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
Перший крок. Доведення неперервності. За припущенням F є неперервною в точці $A_1 = x_0$, тобто

$$k(x_0) = h(x_0) + k(g(x_0)). \tag{1.23}$$

Для довільного фіксованого $k \geq 2$, з рівності (1.20) випливає

$$F(A_k - 0) \;=\; \sum_{i=1}^{k-1} h(g^{\circ(i-1)}(A_k - 0)) + k(g^{\circ(k-1)}(A_k - 0)), \tag{1.24}$$

та

$$F(A_k + 0) \;=\; \sum_{i=1}^{k} h(g^{\circ(i-1)}(A_k + 0)) + k(g^{\circ(k)}(A_k + 0)). \tag{1.25}$$

Використовуючи (1.23) та неперервність h та g, маємо

$$\begin{aligned} & F(A_k+0)-F(A_k-0) \\ & \quad = h(g^{\circ(k-1)}(A_k))+k(g^{\circ(k)}(A_k))-k(g^{\circ(k-1)}(A_k)) \\ & \quad = h(x_0)+k(g(x_0))-k(x_0) \overset{(1.23)}{=} 0. \end{aligned}$$

Другий крок. Доведення диференційовності. З диференційовності F в точці x_0 випливає

$$k'(x_0)=h'(x_0)+k'(g(x_0))g'(x_0). \tag{1.26}$$

Для $k \geq 2$, використовуючи (1.24) та (1.25) отримуємо

$$F'_-(A_k)=\lim_{x\to A_k-0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=1}^{k-1}h(g^{\circ(i-1)}(x))+k(g^{\circ(k-1)}(x))\right),$$

$$F'_+(A_k)=\lim_{x\to A_k+0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=1}^{k}h(g^{\circ(i-1)}(x))+k(g^{\circ(k)}(x))\right).$$

Отже,

$$\begin{aligned} & F'_+(A_k)-F'_-(A_k) \\ & \quad = \lim_{x\to A_k+0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(g^{\circ(k-1)}(x))+k(g^{\circ(k)}(x))-\lim_{x\to A_k-0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(g^{\circ(k-1)}(x)). \end{aligned}$$

Покладемо $u(x):=g^{\circ(k-1)}(x)$, тоді $u(A_k+0)=u(A_k-0)=u(A_k)=x_0$ та

$$\begin{aligned} & F'_+(A_k)-F'_-(A_k) \\ & = \lim_{x\to A_k+0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(u(x))+k(g(u(x)))-\lim_{x\to A_k-0}\frac{d}{dx}k(u(x)) \\ & = \lim_{x\to A_k+0}(h'(u(x))+k'(g(u(x)))g'(u(x)))u'(x)-\lim_{x\to A_k-0}k'(u(x)))u'(x) \\ & = (h'(x_0)+k'(g(x_0))g'(x_0)-k'(x_0))u'(x_0)=0, \end{aligned}$$

з рівності (1.26). Лема доведена. □

З доведеної леми випливає, що функція F є m-раз диференційовною, якщо функція k задовольняє умовам

$$\begin{cases} k(x_0) & = h(x_0)+k(g(x_0)), \\ k'(x_0) & = h'(x_0)+k'(g(x_0))g'(x_0), \\ k^{(m)}(x_0) & = h^{(m)}(x_0)+(k(g(x_0)))^{(m)}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Наступна лема доводить існування такої функції k.

Лема 1.3.10. *Припустимо, що визначник Вронського* $W\Big(x - g(x), \ldots, x^{m+1} - g^{m+1}(x)\Big)$ *не обертається в нуль в точці* x_0*, тоді існує функція* $k(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i$*, що задовольняє (1.27).*

Доведення. Підставляючи представлення $k(x) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x^i$ у (1.27), маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\Big(\alpha_1(x_0 - g(x_0)) + \ldots + \alpha_{m+1}(x_0^{m+1} - g^{m+1}(x_0))\Big) = h(x_0),\\
&\Big(\alpha_1 \tfrac{d}{dx}(x - g(x)) + \ldots + \alpha_{m+1} \tfrac{d}{dx}(x^{1+m} - g^{m+1}(x))\Big)\Big|_{x=x_0} = h'(x_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Big(\alpha_1 \tfrac{d^m}{dx^m}(x - g(x)) + \ldots + \alpha_{m+1} \tfrac{d^m}{dx^m}(x^{m+1} - g^{m+1}(x))\Big)\Big|_{x=x_0} = h^{(m)}(x_0).
\end{aligned}$$

Визначник цієї системи дорівнює $W(x_0)$ і не обертається в нуль за припущенням. Отже, існує єдиний розвязок системи, а отже функція k коректно визначена і задовольняє умовам (1.27). □

Наведемо приклад згладжування ітеративної функції "лог-зірочка".

Приклад 1.3.11. Нагадаємо, що функція “лог-зірочка” є ітеративною, що породжена четвіркою $(1, \ln x, 1, 0)$. Двічі диференційовна модифікація F функції “лог-зірочка” може бути побудована таким чином. Згідно з лемою 1.3.10, відповідна функція k приймає вигляд $k(x) = -\frac{2}{13}x^3 + \frac{3}{13}x^2 + \frac{12}{13}x$. Отже

$$F(x) = \begin{cases} 1 + F(\ln x), & x > 1,\\ -\frac{2}{13}x^3 + \frac{3}{13}x^2 + \frac{12}{13}x, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

На наведеному нижче малюнку представлені графіки функцій $\ln^* x$ та $F(x)$ при $x > 0$.

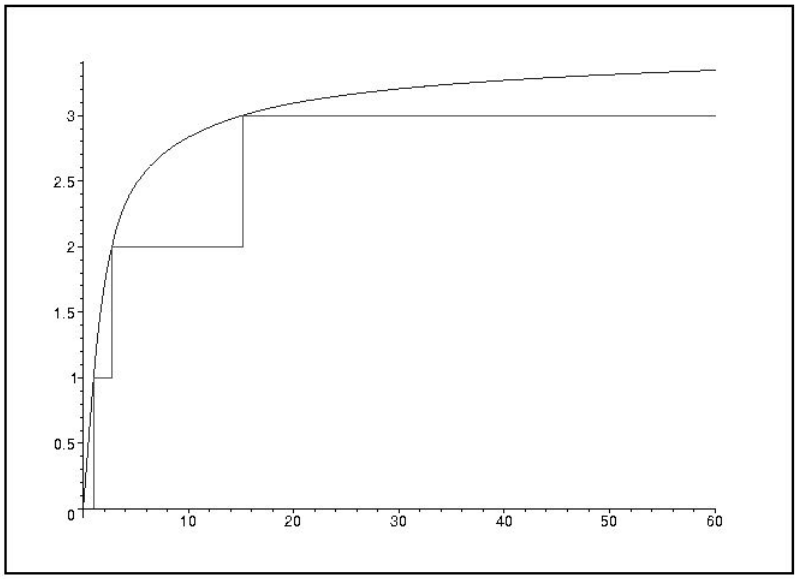

Рис. 1.1: Згладжування функції $x \mapsto \ln^* x$.

Розділ 2

Твірні функції, детерміновані рекурентні співвідношення та їх асимтпотичний аналіз

2.1 Рекурсивно задані послідовності

Кажуть, що послідовність дійсних або комплексних чисел $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задана рекурентно, якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$ перші $m+1$ членів задані явно:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots \quad a_m = b_m, \tag{2.1}$$

а для $n > m$ має місце формула

$$a_n = \phi_n(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0) \tag{2.2}$$

з якої можна обчислити n-й член послідовності, знаючи всі попередні. Рівності (2.1) називаються початковими умовами, а формула (2.2) рекурентним співвідношенням. Класифікацію рекурентних співвідношень можна зробити за типом функцій ϕ_n. Наприклад, якщо функції ϕ_n є лінійними, тобто рекурентне співвідношення має вигляд

$$a_n = c_{n-1}(n)a_{n-1} + c_{n-2}(n)a_{n-2} + \ldots + c_0(n)a_0 + b(n), \tag{2.3}$$

то його називають *лінійним рекурентним співвідношенням.* Послідовність $(b(n))$ називають неоднорідним членом, якщо $b(n) \equiv 0$, то лінійне рекурентне співвідношення називають *однорідним.*

Іншу класифікацію рекурентних співвідношень можна провести за їх *глибиною*. Якщо знайдеться $d \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного $n > m$ функція ϕ_n у визначенні 2.2 залежить лише від $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_{n-d}$ при чому залежність від a_{n-d} є нетривіальною для нескінченної кількості n, то кажуть, що рекурентне співвідношення має глибину d. Іншими словами, рекуренте співвідношення має глибину d, якщо його можна представити у вигляді

$$a_n = \psi_n(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-d}),$$

де функції $x \mapsto \psi_n(c_1, \dots, c_{d-1}, x)$ не є тотожними (по x) константами для нескінченної кількості n та довільних фіксованих $c_1, c_2, \dots, c_{d-1}$. Наприклад, лінійне рекуренте співвідношення (2.3) має глибину d, якщо $c_k(n) = 0$ при $n > m$ та всіх $k < n - d$ та $\overline{\lim}_{n\to\infty}|c_{n-d}(n)| > 0$.

Якщо (2.2) не є рекурентним співвідношенням глибини d для жодного $d \in \mathbb{N}$, то кажуть що воно має *нескінченну глибину*.

Приклад 2.1.1 (Числа Фібоначчі). Розглянемо популяцію (це можуть бути, наприклад, бджоли) в якій кожний самець з'являється на світ непарним шляхом від самки (матки), а кожна самка має двох батків (самця і самку). Зафіксуємо деякого самця з популяції і розглянемо його генеалогію. На нульовому рівні генеалогії знаходиться зафіксований самець, на першому — його мати, на другому — його дід і бабця, на третьому — один прадід та дві прабабці і т.д. Нехай на n-рівні генеалогічного дерева знаходиться a_n предків самців та b_n предків самок. За побудовою, маємо такі співвідношення

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

звідки

$$b_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

та $a_n = b_{n-1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Рекурентне співвідношення (2.4) має глибину 2, воно є лінійним однорідним рекурентним співвідношенням з постійними коефіцієнтами. По-

слідовність $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається *числами Фібоначчі*. У наступних розділах ми знайдемо явну формулу для a_n.

Приклад 2.1.2 (Час поглинання у спадних ланцюгах Маркова). Розглянемо ланцюг Маркова $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$, що стартує в стані n та має матрицю перехідних ймовірностей вигляду

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} & \cdots & p_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $p_{n,k} \geq 0$ та $\sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k} = 1$ при $n \geq 2$. Як видно з структури матриці P, такий ланцюг Маркова за деяку кількість кроків $\tau_n \leq n$ потрапить у стан 1, який є поглинаючим. Маємо $X_0 = n$, $X_1 = I_n$, де випадкова величина I_n має розподіл

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = p_{n,k}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad n \geq 2.$$

Випадкова величина τ_n називається часом поглинання, її математичне сподівання $a_n := \mathbb{E}\tau_n$ задовольняє лінійне рекурентне співвідношення нескінченної глибини:

$$a_1 = 0, \quad a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k} a_k, \quad n \geq 2. \tag{2.5}$$

2.2 Твірні функції

Означення 2.2.1. Твірною функцією послідовності дійсних чи комплексних чисел $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається вираз (формальний степеневий ряд)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Якщо розглядати f як функцію комплексного аргументу, то постає питання про збіжність ряду, що визначає f. Легко бачити, що якщо ряд

(2.6) збігається для деякого $z_0 \in \mathbb{C}$ то він збігатиметься для всіх z при $|z| < |z_0|$ та $\lim_{n\to\infty} |a_n z_0^n| = 0$, тобто $a_n = \mathcal{O}(z_0^{-n})$ при $n \to \infty$. Навпаки, якщо $a_n = \mathcal{O}(A^n)$, то ряд (2.6) збігатиметься для всіх $|z| < A^{-1}$. Таким чином, ряд, що визначає z буде збіжним, якщо послідовність a_n зростає не «надто швидко».

У подальшому той факт, що функція $f(z)$ є твірною для послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ позначатимемо $f \leftrightarrow (a_n)$ або $(a_n) \leftrightarrow f$. Введемо також операцію $[z^n]$ взяття n-го члена послідовності з її твірної функції:

$$[z^n]f(z) = [z^n]\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\Big) := a_n.$$

Основні перетворення над твірними функціями Розглянемо деякі стандартні операції над послідовностями та подивимось, що відбувається з відповідними твірними функціями. Нехай $f \leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $g \leftrightarrow (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ і припустимо, що ряди, які задають твірні функції збігаються в деякому крузі $|z| < R$, $R > 0$.

Лінійні комбінації. Очевидно, що для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \leftrightarrow (\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

і за індукцією це поширюється на довільні скінченні лінійні комібнації.

Операція зсуву. Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}_0$ і розглянемо операції правого та лівого зсувів послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{LS}(a_0, a_1, a_2, \ldots) &= (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots) \\ \mathrm{RS}(a_0, a_1, a_2, \ldots) &= (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m \text{ нулів}}, a_0, a_1, a_2, \ldots). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathrm{LS}(a_0, a_1, a_2, \ldots) &\leftrightarrow \frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m} \\ \mathrm{RS}(a_0, a_1, a_2, \ldots) &\leftrightarrow z^m f(z). \end{aligned}$$

Множення на показникові функції від n. Для довільного $c \in \mathbb{C}$ маємо $(c^n a_n) \leftrightarrow f(cz)$, зокрема $((-1)^n a_n) \leftrightarrow f(-z)$.

Множення на поліноми від n. Як відомо з курсу аналізу степеневі ряди можна почленно диференціювати в будь-якій точці, що лежить всередині круга збіжності, тому

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$

або

$$zf'(z) \leftrightarrow (na_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Повторним диференціюванням можна отримати твірну функцію послідовності $(P(n)a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для довільного полінома P.

Ділення на n. Твірну функцію послідовності $(a_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна отримати оберненою операцією до диференціювання — інтегруванням. Маємо

$$\int_0^z \frac{f(t)-a_0}{t}\mathrm{d}t = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}z^n,$$

тобто

$$\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \leftrightarrow \int_0^z \frac{f(t)-a_0}{t}\mathrm{d}t.$$

Згортки. Згорткою послідовностей $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ та $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ називається послідовність $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначається формулою

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Перемноживши почленно ряди $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k$ та $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k z^k$ та збираючи коефіцієнти при однакових степенях z, бачимо

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)z^n,$$

а отже

$$f(z)g(z) \leftrightarrow (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Окремими важливим випадком є згортка з тотожною послідовністю. Нехай $g(z) = \frac{1}{1-z}$, тобто $g(z) \leftrightarrow (1)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Тоді для довільної послідовності $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ з твірною функцією f маємо

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)z^n,$$

тобто

$$(1-z)^{-1}f(z) \leftrightarrow (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{2.7}$$

Твірні функції послідовностей $(a_n\mathbb{1}(n \in m\mathbb{Z}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ для $m \in \mathbb{N}$. Досить просто отримати твірні функції послідовності парних членів $(a_n\mathbb{1}(n-$ парне$))_{n\in\mathbb{N}_0}$ та непарних членів $(a_n\mathbb{1}(n-$ непарне$))_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$f(z)+f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+(-1)^n a_n)z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}z^{2n},$$

тому

$$\frac{f(z)+f(-z)}{2} \leftrightarrow (a_0,0,a_2,0,a_4,\ldots), \quad \frac{f(z)-f(-z)}{2} \leftrightarrow (0,a_1,0,a_3,0,\ldots).$$

Аналогічні формули для довільного $m \in \mathbb{N}$ можна отримати розглянувши суми

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(e^{\frac{2\pi j\mathrm{i}}{m}}z),$$

де $(e^{\frac{2\pi j\mathrm{i}}{m}})_{j=0,m-1}$ — корені степеня m з одиниці. Маємо

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(e^{\frac{2\pi j\mathrm{i}}{m}}z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi jin}{m}}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big(\sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi jin}{m}}\Big)z^n = m\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}z^{mn},$$

де ми використали формулу

$$\sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi jin}{m}} = \sum_{j=0}^{m-1}\left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i}n}{m}}\right)^j = m\mathbb{1}(n \in m\mathbb{Z}).$$

Отже,

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(e^{\frac{2\pi j\mathrm{i}}{m}}z) \leftrightarrow (a_0,0\ldots,0,a_m,0,\ldots,0,a_{2m},0,\ldots,0,a_{3m},0,\ldots). \tag{2.8}$$

Приклад 2.2.2 (Твірна функція гармонічних чисел). Враховуючи відомий з курсу аналізу розклад

$$-\ln(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k}, \quad |z|<1$$

та формулу (2.7), отримаємо

$$(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \leftrightarrow \frac{1}{1-z}\ln\frac{1}{1-z}.$$

Приклад 2.2.3 (Задача про розмін монет та формула згортки). Нехай в деякій країні в обігу знаходяться монети номіналом 1, 5, 10, 25 та 50 копійок. Позначимо a_n — число способів сплатити n копійок, використовуючи лише вказані номінали. Іншими словами a_n є кількістю способів подати натуральне число n у вигляді суми доданків, кожен з яких може приймати значення з множини $\{1, 5, 10, 25, 50\}$. Отримаємо твірну функцію послідовності a_n. Будемо міркувати індуктивно за кількістю різних номіналів. Припустимо, що нам відома твірна функція g послідовності b_n — числа способів представити n у вигляді суми доданків з множини $\{1, 5, 10, 25\}$. Нехай c_n — число способів представити n у вигляді суми доданків з множини $\{50\}$. У введених позначеннях маємо

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}c_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто, щоб подати n у вигляді доданків з $\{1, 5, 10, 25, 50\}$, потрібно для деякого $k = \{0, 1, \ldots, n\}$ подати k у вигляді доданків з $\{50\}$ та $n - k$ у вигляді доданків з $\{1, 5, 10, 25\}$. Отже, ми бачимо, що (a_n) є згорткою (b_n) та (c_n). З іншого боку, зрозумло, що $c_n = \mathbb{1}(n \in 50\mathbb{Z})$, тобто, якщо n кратне 50, то існує єдиний спосіб сплатити n монетами по 50 копійок, якщо ж n не ділиться на 50 то цього зробити взагалі не можна, тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{50n} = \frac{1}{1-z^{50}},$$

звідки

$$f(z) = g(z)\frac{1}{1-z^{50}}.$$

Застосовуючи ці ж міркування до твірної функції $g(z)$, робимо висновок, що

$$g(z) = h(z)\frac{1}{1-z^{25}},$$

де h є твірною функцією послідовності d_n — числа способів подати n у вигляді доданків з $\{1, 5, 10\}$. Таким чином,

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{25})(1-z^{50})}.$$

Абсолютно такі ж міркування дозволяють узагальнити отриманий результат. А саме, розглянемо деяку (скінченну чи зліченну) множину $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$ і нехай a_n — кількість способів подати число n у вигляді суми доданків, що належать $\mathcal{T}$, тоді твірна функція f послідовності a_n задається добутком

$$f(z) = \prod_{\tau \in \mathcal{T}} \frac{1}{1-z^\tau}.$$

Приклад 2.2.4 (Подільність біноміальних випадкових величин). Нехай випадкова величина ξ_n має біноміальний розподіл з параметрами $p \in (0,1)$ та n, тобто

$$p_{n,k} := \mathbb{P}\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Для фіксованого m знайдемо ймовірність $s_{n,m} := \mathbb{P}\{\xi \text{ ділиться на } m\}$ та границю $s_m := \lim_{n\to\infty} p_{n,m}$.

Твірна функція послідовності $(p_{n,k})_{k=0,\ldots,n}$ дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k = (1-p+pz)^n.$$

За визначенням маємо

$$s_{n,m} = \sum_{0 \le k \le n/m} p_{n,km} = f_m(1),$$

де f_m — твірна функція послідовності $(\underbrace{p_{n,0}, 0, \ldots, p_{n,m}, 0, \ldots, p_{n,2m}, \ldots}_{n})$

Згідно з формулою (2.8), підставляючи $z = 1$, маємо

$$s_{n,m} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (1 - p + pe^{\frac{2\pi j \mathrm{i}}{m}})^n = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} (1 - p + pe^{\frac{2\pi j \mathrm{i}}{m}})^n.$$

Оскільки при $j = 1, \ldots, m-1$

$$\begin{aligned} |1 - p + pe^{\frac{2\pi j \mathrm{i}}{m}}|^2 &= (1-p)^2 + 2p(1-p)\cos\Big(\frac{2\pi j}{m}\Big) + p^2 \\ &< (1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2 = 1, \end{aligned}$$

то для довільного фіксованого $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = \frac{1}{m}.$$

Формальні степеневі ряди та дії над ними. Ряд (2.6) може розбігатись для всіх $z \neq 0$, якщо (a_n) зростає занадто швидко. Так, ряди, що задають твірні функції для послідовностей $a_n = n!$ та $a_n = \ln^n n$ розбігаються для всіх $z \neq 0$.

Більшість операцій над твірними функціями, про які йшла мова вище, можна поширити і на випадок розбіжних твірних функцій. Розглянемо формальну конструкцію, яка дає обгрунтування таким діям. Будемо розлядати ряд (2.6) як, записаний у вигляді нескінченної суми, елемент множини $\mathbb{C}^\infty$ на якій введениі операції додавання (віднімання) та множення за правилами:

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \pm \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \\ \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n. \end{aligned}$$

На множині $\mathbb{C}^\infty$ можна ввести структуру повного ультраметричного[1] простору, поклавши

$$d(f,g) := 2^{-\mathrm{val}(f-g)},\ \mathrm{val}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\},\ \mathrm{val}(0) := +\infty.$$

[1]Пара (X, d) називається ультраметричним простором, якщо відображення $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ задовольняє умовам: 1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2) $d(x,y) = d(y,x)$; 3) $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$.

У топології, породженій ультраметрикою d, послідовність формальних степеневих рядів $\left(\sum_{n=0} a_n^{(k)} z^n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ збігається при $k \to \infty$, якщо для кожного фіксованого n коефіцієнти $a_n^{(k)}$ стабілізуються, починаючи з деякого номера, тобто існує номер $k_0 = k_0(n)$ такий, що $a_n^{(k_0)} = a_n^{(k_0+1)} = a_n^{(k_0+2)} = \ldots$.

За допомогою введеної топології можна визначити ділення формальних степеневих рядів у такий спосіб. Нехай $a_0 = 0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k z^k$, покажемо, що ряд $\sum_{k\geq 0} f^k(z)$ збігається у $(\mathbb{C}^\infty, d)$. Враховуючи, що простір $(\mathbb{C}^\infty, d)$ повний, достатньо показати, що для довільного фіксованого $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{val}\Big(\sum_{k=N}^{N+p} f(z)^k\Big) = +\infty. \tag{2.9}$$

Дійсно,

$$\sum_{k=N}^{N+p} f(z)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=N}^{N+p}\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\Big)z^n,$$

де індекси i_j (з огляду на умову $a_0 = 0$) беруться з множини $\{1, 2, \ldots, n\}$. Бачимо, що при $k > n$

$$\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\Big) = 0,$$

а отже для довільного фіксованого n

$$\sum_{k=N}^{N+p}\Big(\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\Big) = 0$$

при $N > n$. Отже, співвідношення (2.9) виконується. Таким чином, поклавши

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1-(1-f(z))} := \sum_{k=0}^{\infty}(1-f(z))^k,$$

де ряд у правій частині збігається в $(\mathbb{C}^\infty, d)$, якщо $a_0 = 1$, ми задамо операцію взяття оберненого елемента в $\mathbb{C}^\infty$, а отже й операцію ділення. Аналогічним чином (через представлення рядами) можна ввести операції потенціювання $\exp(f(z))$, логарифмування $\ln f(z)$ і т.д.

Операція диференціювання формальних степеневих рядів вводиться за таким правилом

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n,$$

а обернена операція інтегрування, відповідно, за правилом

$$\int_0^w \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} w^n$$

Зауважимо, що

$$\Big(\int_0^w f(z)\mathrm{d}z\Big)' = f(w), \quad \int_0^w f'(z)\mathrm{d}z = f(w) - a_0.$$

2.3 Лінійні рекурентні співвідношення скінченної глибини

2.3.1 Постійні коефіцієнти

Нагадаємо, що лінійне рекурентне співвідношення скінченної глибини з постійними коефіцієнтами можна записати у вигляді

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + b_n, \quad n \geq k \tag{2.10}$$

для деяких постійних коефіцієнтів $c_1, c_2, \ldots, c_k$, послідовності (b_n) та початкових умов

$$a_i = \hat{a}_i, \quad 0 \leq i < k. \tag{2.11}$$

Твірні функції. Класичний метод розв'язку таких рекурентних співвідношень — метод твірних функцій. Замість того щоб шукати безпосереднього елементи послідовності (a_n), розглянемо твірні функції

$$\phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \psi(x) := \sum_{n=k}^{\infty} g_n x^n.$$

Покладемо для зручності $p_j(x) := \sum_{i=0}^{k-j} \hat{a}_i x^i$ для $j = 1, \ldots, k$, домножимо для кожного $n \geq k$ рівність (2.10) на x^n та просумуємо по всім $n \geq k$:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = c_1 x \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + c_2 x^2 \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_k x^k \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} + \psi(x).$$

Враховуючи, що при $0 \leq i < k$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-i} x^{n-i} = \sum_{n=k-i}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{k-i-1} a_n x^n = \phi(x) - p_{i+1}(x)$$

та збираючи коефіцієнти при $\phi(x)$, отримуємо

$$\phi(x) = \frac{p_1(x) - c_1 x p_2(x) - \ldots - c_{k-1} x^{k-1} p_k(x) + \psi(x)}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_k x^k}. \tag{2.12}$$

Для досить широкого класу послідовностей (b_n) (або, що еквівалентно, твірних функцій $\psi(x)$) явний вигляд a_n можна отримати з представлення (2.12) за допомогою розкладу правої частини на прості дроби. Продемонструємо це на прикладі.

Приклад 2.3.1. Розв'яжемо рекурентне співвідношення

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + n2^n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 0.$$

Застосуємо формулу (2.12). Зрозуміло, що $c_1 = 5, c_2 = -6$ та

$$p_1(x) = p_2(x) = 0.$$

З рівності

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n2^n x^n = 2x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^{n-1} - 1\Big) = 2x\Big(\frac{1}{(1-2x)^2} - 1\Big)$$

після елементарних перетворень отримаємо

$$\phi(x) = \frac{8x^2(1-x)}{(1-2x)^3(1-3x)}.$$

Розкладаючи раціональну функцію в правій частині на елементарні дроби, запишемо

$$\phi(x) \;=\; -8x^2\Big(\frac{12}{1-2x} + \frac{4}{(1-2x)^2} + \frac{1}{(1-2x)^3} - \frac{18}{1-3x}\Big).$$

Розкладемо кожен з простих дробів в ряд Тейлора в околі 0:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= -96\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{n+2} - 32\sum_{n=0}^{\infty}n2^{n-1}x^{n+1}\\ &- 4\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)2^{n-2}x^n + 144\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^{n+2}.\end{aligned}$$

Звідки, збираючи члени при x^n, отримаємо остаточну відповідь

$$a_n = 16\cdot 3^n - 2^n(n^2+7n+16), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рекурентного співвідношення. Розглянемо лінійне рекурентне співвідношення (2.10) та відповідне однорідне співвідношення, отримане відкиданням послідовності (b_n):

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}, \quad n \geq k. \tag{2.13}$$

Забудемо на деякий час про початкові умови (2.11) та спробуємо знайти розв'язок (2.13) у вигляді $a_n = \lambda^n$. Після підстановки та скорочення на λ^{n-k} отримаємо так зване *характеристичне рівняння*:

$$\lambda^k = c_1\lambda^{k-1} + c_2\lambda^{k-2} + \ldots + c_k.$$

Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — корені цього рівняння, то "загальним розв'язком" однорідного співвідношення (2.13) буде лінійна комбінація

$$a_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n + \ldots + \alpha_k\lambda_k^n, \tag{2.14}$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — довільні константи, варіацією яких можна задовольнити задані початкові умови. Якщо характеристичне рівняння має кратні корені то загальний розв'язок потрібно скорегувати, а саме, якщо λ_i є коренем кратності k_i, то замість доданка $\alpha_i\lambda_i^n$ у формулі (2.14) слід включити доданок $P_{k_i-1}(n)\lambda_i^n$, де P_{k_i} — поліном степеня $k_i - 1$ з невідомими коефіцієнтами. Наприклад, якщо $k = 4$ та $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4$, то загальний розв'язок однорідного співвідношення слід шукати у вигляді

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2)\lambda_1^n + \alpha_4\lambda_4^n.$$

Поверенемось тепер до неоднорідного співвідношення (2.10). По аналогії з теорією звичайних диференціальних рівнянь (або теорією систем лінійних рівнянь) має місце така теорема

Теорема 2.3.2. *Загальний розв'язок неоднорідного співвідношення* (2.10) *є сумою загального розв'язку однорідного сріввідношення* (2.13) *та довільного часткового*[2] *розв'язку* (2.10).

Ця теорема дає змогу отримати розв'язок неоднорідного співвідношення (2.10) з початковими умовами (2.11) такою послідовністю дій:

- відкинувши неоднорідний член та розв'язавши відповідне характеристичне рівняння, знаходимо загальний розв'язок a_n^{hom} однорідного співвідношення (2.13);
- знаходимо який-небудь частковий розв'язок a_n^{partial} неоднорідного співвідношення (про те, як це зробити, буде сказано нижче);
- записуємо загальний розв'язок неоднорідного сріввідношення у вигляді $a_n^{\text{inhom}} = a_n^{\text{hom}} + a_n^{\text{partial}}$ та знаходимо невідомі константи, що входять у a_n^{hom} з початкових умов.

Частковий розв'язок зазвичай шукається методом невизначених коефіцієнтів в залежності від вигляду неоднорідного члена (b_n):

- Якщо $b_n = \alpha^n$ то $a_n^{\text{partial}} = P(n)\alpha^n$, де P — многочлен степеня l з невідомими коефіцієнтами, де l — кратність α, як кореня характеристичного рівняння. Зокрема, якщо α не є його коренем, то частковий розв'язок шукається у вигляді $a_n^{\text{partial}} = c\alpha^n$ для деякої константи c.
- Якщо $b_n = P(n)$ для деякого многочлена P, то $a_n^{\text{partial}} = Q(n)$, де Q — многочлен того ж степеня, що й P.

[2]Частковим називається розв'язок, який задовольняє (2.10) для деякого набору початкових умов.

- Якщо $b_n = P(n)\alpha^n$ для деякого многочлена P, то $a_n^{\text{partial}} = Q(n)\alpha^n$, де $Q(n)$ — многочлен степеня $l + m$ з невідомими коефіцієнтами, де l — кратність α, як кореня характеристичного рівняння, а m — степінь P.

Приклад 2.3.3. Розв'яжемо приклад 2.3.1 наведеним вище методом. Відповідне однорідне рекурентне співвідношення має вигляд

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},$$

а відповідне йому характеристичне рівняння

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6. \tag{2.15}$$

Це рівняння має два різних корені $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = 3$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$a_n^{\text{hom}} = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n.$$

Неоднорідний член рекурентного співвідношення є $n2^n$ і так як 2 є коренем кратності 1 характеристичного рівняння (2.15), то частковий розв'язок слід шукати у вигляді

$$a_n^{\text{partial}} = (pn^2 + qn + r)2^n$$

для деяких констант p, q, r. Підставляючи вираз $(pn^2+qn+r)2^n$ у неоднорідне рекурентне співвідношення, скорочуючи на 2^{n-2} та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях n, отримаємо частковий розв'язок

$$a_n^{\text{partial}} = -2^n(n^2 + 7n + r),$$

де r — довільна константа. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рекурентного співвідношення

$$a_n^{\text{inhom}} = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n - 2^n(n^2 + 7n).$$

З початкових умов $a_0 = a_1 = 0$ знаходимо невідомі константи $\alpha_1 = -16$ та $\alpha_2 = 16$, що дає нам ту саму відповідь, яку ми отримали вище методом твірних функцій.

2.3.2 Змінні коефіцієнти

Лінійне неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку зі змінними коефіцієнтами. У загальному вигляді таке рекурентне співвідношення записується так

$$a_k = \alpha_k a_{k-1} + \beta_k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.16}$$

з початковою умовою $a_0 = \hat{a}_0$.

Для знаходження розв'язку рекурсії (2.16) використаємо техніку ітерації. В рівність $a_n = \alpha_n a_{n-1} + \beta_n$ підставимо вираз $a_{n-1} = \alpha_{n-1} a_{n-2} + \beta_{n-1}$, одержимо

$$a_n = \alpha_n(\alpha_{n-1} a_{n-2} + \beta_{n-1}) + \beta_n = \alpha_n \alpha_{n-1} a_{n-2} + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n.$$

В отриману рівність підставимо $a_{n-2} = \alpha_{n-2} a_{n-3} + \beta_{n-2}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n \alpha_{n-1}(\alpha_{n-2} a_{n-3} + \beta_{n-2}) + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n \\ &= \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} a_{n-3} + \alpha_n \alpha_{n-1} \beta_{n-2} + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n. \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес далі, на k-му кроці дістанемо

$$\begin{aligned} a_n &= \Big(\prod_{i=0}^{k} \alpha_{n-i}\Big) a_{n-k-1} + \Big(\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{n-k} + \Big(\prod_{i=0}^{k-2} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{n-k+1} \\ &+ \ldots + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n \\ &= \Big(\prod_{i=0}^{k} \alpha_{n-i}\Big) a_{n-k-1} + \sum_{j=0}^{k} \Big(\prod_{i=0}^{k-j-1} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{n-k+j}. \end{aligned}$$

Зокрема, при $k = n-1$, отримаємо

$$a_n = \Big(\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_{n-i}\Big) a_1 + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\prod_{i=0}^{n-j-2} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{1+j}.$$

або

$$a_n = a_0 \prod_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \Big(\prod_{i=j+1}^{n} \alpha_i\Big) \beta_j. \tag{2.17}$$

У правильності цієї формули можна переконатись методом математичної індукції. Формула (2.17) дає загальний розв'язок лінійного рекурентного співвідношення першого порядку зі змінними коефіцієнтами. Цікавими є окремі випадки цієї формули:

- якщо $\alpha_k = \alpha$ для всіх $k \geq 2$ (випадок лінійного рекурентного співвідношення першого порядку *з постійним коефіцієнтом*), то

$$a_n = a_0\alpha^n + \sum_{j=1}^{n} \alpha^{n-j}\beta_j; \tag{2.18}$$

- якщо $\beta_k = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ (випадок лінійного *однорідного* рекурентного співвідношення першого порядку), то

$$a_n = a_0 \prod_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{2.19}$$

Однорідні рекуренті співвідношення з поліноміальнимим коефіцієнтами. Розлянемо однорідне рекуренте співвідношення

$$a_n = p_1(n)a_{n-1} + p_2(n)a_{n-2} + \ldots + p_k(n)a_{n-k}, \quad n \geq k \tag{2.20}$$

де $p_j(n)$, $j = 1, \ldots, k$ — поліноми. Виявляється, що кожне таке рекурентне співвідношення можна звести до деякого диференціального рівняння відносно твірної функції послідовності (a_n).

Теорема 2.3.4. *Нехай $\phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тоді знайдеться таке $m \in \mathbb{N}$, поліноми $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_m(x)$ та $r(x)$, що*

$$q_0(x)\phi(x) + q_1(x)\phi'(x) + q_2(x)\phi''(x) + \ldots + q_m(x)\phi^{(m)}(x) = r(x).$$

Доведення. Введемо позначення $x^{\underline{i}} := x(x-1)\cdots(x-i+1)$. Система функцій $(x^{\underline{j}})_{j\in\mathbb{N}_0}$ утворює базис простору поліномів від змінної x, а отже

$$p_i(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} n^{\underline{j}}$$

для деяких коефіцєнтів α_{ij} (для кожного i є лише скінченна кількість α_{ij}, що відмінні від нуля). Маємо

$$\begin{aligned}
\phi(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \hat{a}_n x^n &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} n^{\underline{j}} \Big) a_{n-i} x^n \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-j+1) a_{n-i} x^n \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^j \sum_{n=k-i}^{\infty} (n+i)\cdots(n+i-j+1) a_n x^{n+i-j} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^j \Big(x^i \sum_{n=k-i}^{\infty} a_n x^n \Big)^{(j)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^j \Big(x^i \Big(\phi(x) - \sum_{n=0}^{k-i-1} \hat{a}_n x^n \Big) \Big)^{(j)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^j \Big(x^i \phi(x) \Big)^{(j)} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} x^j \Big(\sum_{n=0}^{k-i-1} \hat{a}_n x^{n+i} \Big)^{(j)}.
\end{aligned}$$

Таким чином, $\phi(x)$ є розв'язком деякого лінійного диференціального рівняння з поліноміальними коефіцієнтами. Зауважимо, що порядок цього рівняння залежить не лише від глибини рекурентного співвідношення, а й від степенів многочленів p_i. □

Приклад 2.3.5. Розв'яжемо рекурентне співвідношення

$$a_n = (n+1)a_{n-1} - n a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Покладемо $\phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. З рівності

$$\phi(x) - 1 - x = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \Big(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n+1} \Big)' - x \Big(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \Big)'$$

отримаємо

$$\phi(x) - 1 - x = \Big(x^2 (\phi(x) - 1) \Big)' - x \Big(x^2 \phi(x) \Big)'$$

або

$$\phi'(x) + \frac{2x - 2x^2 - 1}{x^2(1-x)}\phi(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

з початковою умовою $\phi(0) = 1$. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку можна розв'язати, наприклад, методом варіації довільної сталої або просто застосувати формулу Ейлера, що дає $\phi(x) = (1-x)^{-1}$, а отже $a_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

2.4 Лінійні рекурентні співвідношення нескінченної глибини

У цьому розділі ми розглянемо методи асимтпотичного аналізу лінійних рекурентних співвідношень нескінченної глибини.

Нехай послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задана рекурентним співвідношенням

$$a_1 = a, \quad a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k} a_k, \quad n \geq 2, \tag{2.21}$$

де $(c_{n,k})_{n\geq 2,\, 1\leq k<n}$ – заданий трикутний невід'ємних чисел, а $(b_n)_{n\geq 2}$ – задана послідовність чисел. У загальному випадку асимптотичний аналіз (2.21) є складною аналітичною задачею. Тим не менш, існують більш-менш загальні методи дослідження асимптотичної поведінки рекурсій такого вигляду.

Як і для рекурентних співвідношень скінченної глибини, одним з найпотужніших методів асимтпотичного аналізу (2.21) є метод *сингулярного аналізу твірних функцій* [3, 4]. Метод дає точну інформацію про асимптотику розв'язку (2.21) у тих випадках, коли вдається знайти явний вигляд твірної функції послідовності (a_n), що визначена (2.21) або, принаймні, отримати функціональне (інтегральне, диференціальне) рівняння відносно цієї твірної функції. Ми докладно розглянемо метод сингулярного аналізу в Розділі 2.6.

2.4.1 Метод ітеративних функцій

В подальшому, якщо не стверджується протилежне, ми вважаємо, що $b_n \geq 0$, а тому й $a_n \geq 0$. З доведень, наведених нижче теорем, випливає, що ми могли б припускати лише, що b_n є знакосталою для досить великих n. За цього припущення, формулювання результатів виглядали б ускладненими, тому ми вирішили дотримуватись меншої загальності при більшій зрозумілості.

Вважатимо, що для кожного $n \geq 2$ серед чисел $(c_{n,k})_{1\leq k<n}$ є принаймні одне ненульове. Виявляється, що за такої умови, не зменшуючи загальності, можна вважати, що для довільного $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k} = 1 \text{ та } c_{n,k} \geq 0,\ k = 1, \ldots, n-1. \tag{2.22}$$

Дійсно, визначимо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рекурсивно: $f_1 = 1$ та

$$f_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} f_k, \quad n > 2.$$

Використавши індукцію по n, легко переконатись, що $f_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а тому можна визначити нову послідовність $a_n^* := a_n/f_n$ для якої матимемо, враховуючи (2.21),

$$a_1^* = a_1, \quad a_n^* = b_n^* + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k}^* a_k^*, \quad n \geq 2,$$

де $b_n^* := b_n/f_n$, $c_{n,k}^* := c_{n,k} f_k/f_n$. При цьому за побудовою

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{n,k}^* = 1 \text{ та } c_{n,k}^* \geq 0,\ k = 1, \ldots, n-1.$$

В подальшому ми називатимемо, рекурсію (2.21), яка задовольняє (2.22) *рекурсією з вагами зведеними до ймовірностей.* Якщо (2.22) виконується, позначимо через I_n випадкову величину з розподілом

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = c_{nk}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Теореми про еквівалентність. Розпочнемо з аналізу асимптотичного випливу неоднорідного члена (b_n). Основний результат дається такою теоремою.

Теорема 2.4.1. *Припустимо, що $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняють рекурсіям з вагами зведеними до ймовірностей*

$$a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a_k, n \geq N, \tag{2.23}$$

та

$$a'_n = b'_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a'_k, n \geq N, \tag{2.24}$$

відповідно. Припустимо, що $b_n \geq 0$ для $n \geq N$ та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Тоді

I. з $b'_n \sim b_n$, $n \to \infty$ випливає $a'_n \sim a_n$, $n \to \infty$, та

II. з $b'_n = o(b_n)$, $n \to \infty$ випливає $a'_n = o(a_n)$, $n \to \infty$.

Доведення пункту (I). Припустимо, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $a_n > (1 + \varepsilon_0)a'_n$ для нескінченно багатьох n. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то ми можемо обрати $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ таке, що для довільного $c > 0$ нерівність $a_n > (1+\varepsilon)a'_n + c$ виконується для нескінченно багатьох n. Нехай n_c – це мінімальне таке n. Оскільки $\lim\limits_{c\to\infty} n_c = +\infty$, не зменшуючи загальності, вважаємо, що $n_c > N$. Для $n \leq n_c - 1$ маємо $a_n \leq (1 + \varepsilon)a'_n + c$, звідки випливає

$$(1 + \varepsilon)a'_{n_c} + c < a_{n_c} = b_{n_c} + \sum_{k=1}^{n_c-1} p_{n_c k} a_k \leq b_{n_c} + c + (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{n_c-1} p_{n_c k} a'_k.$$

Спрощуючи останній вираз маємо $1 + \varepsilon < b_{n_c}/b'_{n_c}$. Спрямовуючи $c \to \infty$, маємо $\varepsilon < 0$, що суперечить припущенню. Отже, ми довели

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} \leq 1.$$

Симетричні міркування доводять протилежну нерівність для нижньої границі.

Доведення пункту(II) випливає із застосування вже доведеної частини (I) до послідовностей $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(a_n - a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ та того факту, що з відношення $b_n \sim b_n - b'_n$ випливає $a_n \sim a_n - a'_n$. $\square$

Результат, аналогічний доведеній вище лемі (2.4.1), для неперервного аргументу міститься у наступній теоремі.

Теорема 2.4.2. *Нехай трійки* (h_1, g, x_0) *та* (h_2, g, x_0) *породжують ітеративні функції* f_1 *та* f_2*, відповідно. Припустимо що* $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = +\infty$*. Тоді*

I. з $h_2(x) \sim h_1(x)$*,* $x \to \infty$ *випливає* $f_2(x) \sim f_1(x)$*,* $x \to \infty$*, та*

II. з $h_2(x) = o(h_1(x))$*,* $x \to \infty$ *випливає* $f_2(x) = o(f_1(x))$*,* $x \to \infty$*.*

Теорема 2.4.3. *Припустимо, що послідовність* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє рекурсію* (2.21) *з вагами зведеними до ймовірностей. Нехай* $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– неперервна, зростаюча та необмежена функція, така що*

$$g(n) = \mathbb{E}I_n + o(\mathbb{E}I_n), \quad n \to \infty^3,$$

та $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– неперервна функція, така що*

$$h(n) \sim b_n, \quad n \geq 2.$$

Якщо

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
- $g^*(\mathbb{E}I_n) - g^*(g(n)) = o(h(n))$, $n \to \infty$,

де g^* *– це ітеративна функція породжена трійкою* (h, g, x_0)*, то мають місце такі імплікації*

$$\begin{gathered}\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) = o(h(n)), \quad n \to \infty \Longrightarrow \\ a_n \sim g^*(n), \quad n \to \infty,\end{gathered} \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered}\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) \sim dh(n), \quad n \to \infty, \quad \text{для деякого } d < 1 \Longrightarrow \\ a_n \sim (1-d)^{-1} g^*(n), \quad n \to \infty.\end{gathered} \tag{2.26}$$

[3]Оскільки $I_n \leq n - 1$, то завжди можливо обрати g таку що (1.19) виконується.

Доведення. Покладемо $a'_n := a_n - g^*(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Послідовність $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє рекурентному співвдношенню

$$a'_1 = -g^*(1), \quad a'_n = b_n - g^*(n) + \mathbb{E}g^*(I_n) + \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} a'_k, \quad n \geq 2. \tag{2.27}$$

Якщо $\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) = o(h(n))$ та $g^*(\mathbb{E}I_n) - g^*(g(n)) = o(h(n))$, то неоднорідний член (2.27) є $o(h(n))$ при $n \to \infty$. Застосовуючи частину (II) теореми 2.4.1, отримуємо $a'_n = o(a_n)$, а тому $a_n \sim g^*(n)$.

Якщо $\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) \sim dh(n)$ для деякого $d \in (0,1)$ та $g^*(\mathbb{E}I_n) - g^*(g(n)) = o(h(n))$, тоді неоднорідний член (2.27) асимптотично еквівалентний $dh(n)$. Застосовуючи частину (I) теореми 2.4.1, маємо $a'_n \sim da_n$, звідки випливає, що $a_n \sim (1-d)^{-1} g^*(n)$.

Якщо $\mathbb{E}g^*(I_n) - g^*(\mathbb{E}I_n) \sim dh(n)$ для деякого $d < 0$, то, застосувуючи частину (II) Теореми 2.4.1 до послідовностей $(g^*(n) - a_n)$ та (a_n), отримуємо $g^*(n) - a_n \sim -da_n$. Це співвідношення еквівалентне $a_n \sim (1-d)^{-1} g^*(n)$. □

Теорема 2.4.4. *Припустимо, що $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє рекурсію (2.21) зведену до ймовірностей. Нехай $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є двічі диференційовною, зростаючою та необмеженою функцією, такою що*

$$g(n) = \mathbb{E}I_n + o(\mathbb{E}I_n), \quad n \to \infty,$$

та $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є двічі диференційовною функцією, такою що

$$h(n) \sim b_n, \quad n \geq 2.$$

Якщо виконуються умови

(C1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(C2) Існує неперервна функція k, така що ітеративна функція F породжена четвіркою (h, g, x_0, k) є двічі диференційовною,

(C3) $F(\mathbb{E}I_n) - F(g(n)) = o(h(n))$, $n \to \infty$,

(C4) існує $M > 0$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{D}\, I_n \le M\mathbb{E}I_n$,

(C5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\ge \mathbb{E}I_n/2} |F''(x)| \dfrac{\mathbb{D}\, I_n}{h(n)} = 0,$

(C6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sup_{1\le x\le n} |F(x)|}{h(n)\mathbb{D}\, I_n} = 0,$

(C7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F'(\mathbb{E}I_n)}{h(n)} = 0,$

то

$$a_n \sim F(n),\ n \to \infty.$$

Доведення. З виконання умов (C1) та (C3) та імплікації (2.25) теореми 2.4.3 випливає, що достатньо показати

$$\alpha_n := \mathbb{E}F(I_n) - F(\mathbb{E}I_n) = o(h(n)).$$

Поклавши $\kappa := \frac{1}{2M}$ та $A_n := \{|I_n - \mathbb{E}I_n| > \kappa\mathbb{D}\, I_n\}$, отримуємо

$$|\alpha_n| \le |\mathbb{E}(F(I_n) - F(\mathbb{E}I_n))\mathbb{1}(A_n)| + |\mathbb{E}(F(I_n) - F(\mathbb{E}I_n))\mathbb{1}(A_n^c)| =: \beta_n + \gamma_n.$$

Використовуючи нерівність Чебишева маємо

$$\beta_n \le 2 \sup_{1\le x\le n} |F(x)|\mathbb{P}(A_n) \le \frac{2\mathbb{D}\, I_n \sup_{1\le x\le n} |F(x)|}{(\kappa\mathbb{D}\, I_n)^2},$$

що є $o(h(n))$ за умовою (C6).

Двочленний розклад Тейлора в околі точки $\mathbb{E}I_n$ дає

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \left|\mathbb{E}\Big(F'(\mathbb{E}I_n)(I_n - \mathbb{E}I_n) + \frac{1}{2}F''(\theta_n)(I_n - \mathbb{E}I_n)^2\Big)1_{A_n^c}\right| \\
&\le \left|F'(\mathbb{E}I_n)\mathbb{E}(I_n - \mathbb{E}I_n)1_{A_n}\right| + \frac{1}{2}\left|\mathbb{E}F''(\theta_n)(I_n - \mathbb{E}I_n)^2 1_{A_n^c}\right| = \gamma_{1,n} + \gamma_{2,n},
\end{aligned}$$

де $\theta_n \in [\mathbb{E}I_n - \kappa\mathbb{D}\, I_n, \mathbb{E}I_n + \kappa\mathbb{D}\, I_n]$. Застосуємо нерівності Коші-Буняковського та Чебишева і отримаємо

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,n} &= |F'(\mathbb{E}I_n)\mathbb{E}(I_n - \mathbb{E}I_n)1_{A_n}| \le |F'(\mathbb{E}I_n)|\sqrt{\mathbb{E}(I_n - \mathbb{E}I_n)^2}\sqrt{\mathbb{P}(A_n)} \\
&\le |F'(\mathbb{E}I_n)|\sqrt{\mathbb{D}\, I_n}\sqrt{\frac{\mathbb{D}\, I_n}{(\kappa\mathbb{D}\, I_n)^2}} = \frac{1}{\kappa}|F'(\mathbb{E}I_n)|,
\end{aligned}$$

що є $o(h(n))$ за умовою (C7).

Умова (C4) дає оцінку

$$S_4 \;\leq\; \frac{1}{2} \sup_{x \geq \mathbb{E} I_n/2} |F''(x)| \mathbb{D}\, I_n,$$

що є $o(h(n))$ за умовою (C5). □

2.5 Репертуарний метод

Буде додано з часом!

2.6 Сингулярний аналіз твірних функцій

Важливим методом дослідження асимптотики рекурентних послідовностей (і не лише таких послідовностей) є метод сингулярного аналізу твірних функцій. При такому підході твірні функції розглядаються як аналітичні перетворення комплексної площини, а їх *особливі точки* виявляються ключовими об'єктами, що несуть інформацію про асимптотичні властивості самої послідовності.

Метод сингулярного аналізу є особливо потужним, якщо твірні функції послідовностей що досліджуються, вдається знайти у явному вигляді. У таких випадках метод дає змогу отримувати асимптотичні розклади досдіджуваних послідовносьей з високою точністю.

В цьому розділі ми повсякчас будемо використовувати поняття аналітичної функції комплексного аргументу та аналітичного продовження, теорему Коші для аналітичних функцій, а також поняття особливої точки та контура Ганкеля. Потрібна інформація про ці об'єкти та твердження зібрана у Додатку 3.2.

2.6.1 Експоненційний порядок та особливі точки твірних функцій

Означення 2.6.1. Кажуть, що послідовність комплексних чисел $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ асимптотично експоненційна з основою K (позначається $a_n \bowtie K^n$), якщо

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = K. \tag{2.28}$$

З означення верхньої границі це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$

1) $|a_n| > (K-\varepsilon)^n$ для нескінченної кількості n;

2) $|a_n| < (K+\varepsilon)^n$ для всіх n, починаючи з деякого номера.

Послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ асимптотично експоненційна з основою K тоді й лише тоді, коли $a_n = K^n\theta(n)$, де θ — субекспоненційний множник в сенсі

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|\theta(n)|^{1/n} = 1.$$

Типовими прикладами субекспоненційних множників є

$$1, \quad , \ln n, \quad n^9, \quad \frac{\ln\ln n}{\ln n}, \quad e^{\sqrt{n}}, \quad n^4\sin(\pi n/2).$$

Наступне твердження пов'язує радіус збіжності степеневного ряду з асимптотичною експоненційністю послідовності його коефіцієнтів.

Твердження 2.6.2. *Нехай f — аналітична в 0 функція, що представляється в деякому околі 0 степеневим рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

з радіусом збіжності $R \in (0,\infty)$. Тоді $f_n \bowtie \left(\frac{1}{R}\right)^n$.

Доведення. Це твердженя є фактично переформулюванням відомої формули Коші-Адамара для радіуса збіжності степеневого ряду. Для повноти викладення, наведемо його елементарне доведення.

З означення радіуса збіжності випливає, що для довільного $\varepsilon \in (0, R)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(R-\varepsilon)^n$ збіжний. Отже $\lim_{n\to\infty} f_n(R-\varepsilon)^n = 0$, а тому знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $|f_n|^{1/n} < (R-\varepsilon)^{-1}$ для всіх $n > n_0$. Таким чином

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n|^{1/n} < \frac{1}{R-\varepsilon}. \tag{2.29}$$

Припустимо, що для деякого $\varepsilon_0 > 0$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R+2\varepsilon_0},$$

тоді знайдеться $n_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $|f_n|(R+\varepsilon_0)^n < \left(\frac{R+\varepsilon_0}{R+2\varepsilon_0}\right)^n$, а отже ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(R+\varepsilon_0)^n$ збігається, що суперечить означенню R. Тому для всіх $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|f_n|^{1/n} > \frac{1}{R+\varepsilon}, \tag{2.30}$$

що в поєднанні з (2.29) доводить твердження. □

У наступній теоремі стверджується, що на границі круга збіжності степеневого ряду завжди існує особлива точка аналітичної функцій, заданої цим рядом і таким чином встановлюється *перший постулат сингулярного аналізу твірних функцій*:

Положення особливих точок твірної функції визначає асимптотичну експоненційність її коефіцієнтів.

Теорема 2.6.3. *Нехай функція f аналітична в точці z_0 і представляється в околі z_0 степеневим рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

з радіусом збіжності $R \in (0, \infty)$. Тоді на колі $|z-z_0| = R$ існує хоча б одна особлива точка f.

Доведення. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $z_0 = 0$. Проведемо доведення від супротивного. За теоремою 3.2.4 (див. Додаток 3.2)

у всіх точках круга $|z| < R$ функція f аналітична. Припустимо, що особливих точок на колі $|z| = R$ немає, тоді f повинна бути аналітичною у деякому крузі $|z| < \rho$ з $\rho > R$. Покладемо $r := (R + \rho)/2$.

Застосуємо формулу Коші для коефіцієнтів ряду Тейлора (див. формулу 3.4 в Додатаку 3.2) з контуром $|z| = r$ та точкою $\zeta = 0$. Маємо

$$c_n := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{\mathrm{i}\phi})}{r^n} e^{-\mathrm{i}n\phi} \mathrm{d}\phi = \mathcal{O}(r^{-n}),$$

тому ряд, що представляє f, збігається в крузі $|z| < \rho$, $\rho > R$, що суперечить означенню радіуса збіжності. □

Якщо $z_0 = 0$, то особливі точки на границі круга збіжності, існування яких гарантується наведеною теоремою, називаються *домінантними.*

Наступний результат уточнює попередню теорему у особливо важливому у комібнаториці та аналізі алгоритмів випадку, коли досліджувана аналітична функція є твірною для деякої *невід'ємної* послідовності.

Теорема 2.6.4 (Теорема Принсгейма)**.** *Нехай функція f аналітична в 0 і представляється в його околі рядом*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

з радіусом збіжності $R \in (0, \infty)$. Якщо $c_n \geq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то R є особливою точкою f.

Доведення. Як і в попередній теоремі, доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що f аналітична в R, тоді знайдеться $r \in (0, R)$ таке, що f розкладається в степеневий ряд в усіх точках круга $|z - R| < r$. Нехай h — довільне число з проміжку $(0, r/3)$. Розглянемо розклад f в точці $z_0 := R - h$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z - z_0)^n. \tag{2.31}$$

За біномом Ньютона маємо співвідношення:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0 + z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_0)^k z_0^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} c_n z_0^{n-k} \Big) (z - z_0)^k, \end{aligned}$$

де зміна порядку сумування можлива, оскільки подвійні ряди, що фігурують у виписаних рівностях, збігаються абсолютно. Отже, враховуючи (2.31),

$$g_n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} c_n z_0^{n-k},$$

зокрема, $g_n > 0$. Згідно з вибором h, ряд (2.31) збігається в точці $z_1 = R + h$. Дійсно $z_1 \in \{z : |z - z_0| \le 2h\} \subset \{z : |z - R| < r\}$, де останнє включення випливає з нерівностей $|z - R| \le |z - z_0| + |z_0 - R| \le 2h + h < r$. □

Таким чином,

$$f(z_1) = f(R + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} c_n z_0^{n-k} \Big) (2h)^k.$$

Змінюючи порядок сумування (всі члени цього збіжного подвійного ряду додатні), отримаємо

$$\begin{aligned} f(R + h) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (2h)^k \Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 + 2h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (R + h)^n, \end{aligned}$$

тому $f_n = o((R+h)^{-n})$, що суперечить припущенню, що радіус збіжності f дорівнює R.

2.6.2 Сингулярний аналіз раціональних та мероморфних функцій

У попередньому підрозділі було наведено ряд результатів, які дозволили нам сформулювати та обгрунтувати перший постулат сингулярного

аналізу твірних функцій. Він пов'язав асимптотичну експоненційність послідовності a_n з положенням домінантних особливих точок її твірної функції f:

$$a_n \bowtie A^n, \tag{2.32}$$

де $A = 1/\rho$, а ρ є модулем відстані до домінантної особливої точки f, або, що еквівалентно, радіусом збіжності степеневого ряду, що представляє f в околі початку координат. Згідно з визначенням 2.6.1 асимптотичної експоненційності (2.32) еквівалетно представленню

$$a_n = a^n \theta(n),$$

де для субекспоненційного множника $\theta(n)$ виконується $\overline{\lim}_{n\to\infty} |\theta(n)|^{1/n} = 1$.

У цьому й наступному підрозділах будуть розглянуті методи знаходження $\theta(n)$ для різних класів аналітичних твірних функцій. Загальний принцип, що лежить в основі подальших конструкцій, можна сформулювати у вигляді *другого постулату сингулярного аналізу твірних функцій*:

Тип особливої точки твірної функції визначає вигляд субекспоненційного множника $\theta(n)$.

Згідно з класифікацією особливих точок (див. Додаток 3.2), найпростішим їх типом (крім усувних особливостей) є полюси. У цьому підрозділі буде розглянута теорія сингулярного аналізу для функцій, що мають особливими точками лише полюси: раціональні та мероморфні функції.

Нагадаємо, що функція f називається раціональною, якщо її можна представити у вигляді частки двох поліномів $f(z) = N(z)/D(z)$. Зрозуміло, що скінченними особливим точками раціональних функцій є точки в яких $D(z) = 0$ і всі такі точки є полюсами, порядки яких визначаються кратностями коренів рівняння $D(z) = 0$. Основне твердження, яке дає *точний* вираз для a_n у термінах полюсів f, дається такою теоремою.

Теорема 2.6.5. *Нехай $f(z)$ є раціональною функцією, яка аналітична в 0 та має полюси в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Тоді знайдуться такі поліноми $\{\Pi_j(x)\}_{j=1}^m$, що*

$$a_n := [z^n]f(z) = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n)\alpha_j^{-n}.$$

Степінь полінома Π_j на одиницю менший ніж порядок полюса α_j.

Доведення. Нехай $f(z) = N(z)/D(z)$, тоді має місце розклад f на прості дроби:

$$f(z) = Q(z) + \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{r(\alpha)} \frac{c_{\alpha,k}}{(z-\alpha)^k}, \tag{2.33}$$

де α пробігає всі полюси f, $r(\alpha)$ — порядок полюса α, $Q(z)$ — деякий многочлен степеня $(\deg N(z) - \deg Q(z))^+$.

Отже, при $n > \deg Q(z)$, маємо

$$\begin{aligned}
[z^n]f(z) &= \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{r(\alpha)} c_{\alpha,k}[z^n]\frac{1}{(z-\alpha)^k} = \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{r(\alpha)} \frac{(-1)^k c_{\alpha,k}}{\alpha^k}[z^n]\frac{1}{(1-z/\alpha)^k} \\
&= \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{r(\alpha)} \frac{(-1)^k c_{\alpha,k}}{\alpha^k}\binom{n+k-1}{k-1}\alpha^{-n}.
\end{aligned}$$

Оскільки α пробігає всі полюси f, а вираз $\sum_{k=1}^{r(\alpha)} \frac{(-1)^k c_{\alpha,k}}{\alpha^k}\binom{n+k-1}{k-1}$ є при фіксованому α поліномом по n степеня $r(\alpha) - 1$ (так як при цілому k біноміальний коефіцієнт $\binom{n+k-1}{k-1}$ є поліномом по n степеня $k-1$), то теорема доведена. □

Розглянемо в якості іллюстрації другого принципу сингулярного аналізу твірних функцій простий приклад.

Приклад 2.6.6. Припустимо, що функція f задовольняє всім умовам теореми 2.6.5 та має єдиний домінантний полюс кратності r в точці α_1, тоді $[z^n]f(z) = \frac{C\alpha_1^r}{(r-1)!}\alpha_1^{-n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, де $C := \lim_{z\to\alpha_1}(z-\alpha_1)^r f(z)$. Іншими словами, з одночленної асимптотики раіцональної функції f в околі домінантної особливої точки:

$$f(z) \sim C(z-\alpha_1)^{-r}, \quad z \to \alpha_1$$

випливає одночленна асимптотика f_n при великих n:

$$[z^n]f(z) \sim \frac{C\alpha_1^r}{(r-1)!}\alpha_1^{-n}, \quad n \to \infty.$$

Приклад 2.6.7 (Задача про розмін монет). Розглянемо деяку скінченну множину $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$ і нехай f_n — кількість способів подати число n у вигляді суми доданків, що належать $\mathcal{T}$. Як було показано у прикладі 2.2.3

$$f(z) := \sum_{n\geq 0}^{\infty} f_n z^n = \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \frac{1}{1-z^\tau}. \tag{2.34}$$

Припустимо, що НСД$\{\mathcal{T}\} = 1$. В термінах задачі про розмін монет, це означає, що допустимі номінали не є кратними деякого числа $d > 1$.

Твірна функція $f(z)$ є раціональною, оскільки множина $\mathcal{T}$ за припущенням скінченна. Полюсами f є корені рівнянь $z^\tau = 1$, $\tau \in \mathcal{T}$, тобто корені з одиниці степенів $\tau \in \mathcal{T}$. Зрозуміло, що полюс $z = 1$ має порядок $m := |\mathcal{T}|$. З іншого боку, порядки всіх інших полюсів строго менші за m, так порядок полюса $z = -1$ дорівнює кількості парних чисел в $\mathcal{T}$ ($(-1)^\tau = 1 \Leftrightarrow \tau$ є парним числом), а їх кількість менша за m, оскільки НСД$\{\mathcal{T}\} = 1$. Таким чином

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^m} g(z),$$

де $g(z)$ — деяка раціональна функція, аналітична в 1, всі полюси якої лежать на колі $|z| = 1$ і мають порядок менший m. Згідно з теоремою 2.6.5

$$f_n = P_1(n)(1)^{-n} + \sum_{\alpha} P_\alpha(n)\alpha^{-n},$$

де $P_1(n)$ — поліном степеня $m-1$, сумування ведеться по всім полюсам g, а поліноми P_α мають степінь менший ніж $m-1$. Оскільки $\alpha^{-n} \asymp 1$, то

$$f_n \sim P_1(n) \sim \frac{cn^{m-1}}{(m-1)!}, \quad n \to \infty,$$

де константа $c \in \mathbb{R}$ визначається умовою

$$c = \lim_{z\to 1}(1-z)^m f(z) = \lim_{z\to 1} \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \frac{1-z}{1-z^\tau} \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \lim_{z\to 1} \frac{1-z}{1-z^\tau} = \prod_{\tau\in\mathcal{T}} \frac{1}{\tau}.$$

Виявляється, що результат подібний до теореми 2.6.5 виконується для значно ширшого класу функцій — *мероморфних функцій*. Нагадаємо, що функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ називається мероморфною в області $D \subset \mathbb{C}$, якщо вона аналітична в будь-які замкненій підмножині D за винятком скінченної кількості полюсів (вони можуть накопичуватись на границі області D).

Теорема 2.6.8. *Нехай функція f є мероморфною в крузі $|z| < R$, аналітичною на його границі $|z| = R$ та в початку координат. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — полюси f в крузі $|z| < R$. Тоді*

$$f_n := [z^n]f(z) = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n)\alpha_j^{-n} + \mathcal{O}(R^{-n}), \quad n \to \infty. \tag{2.35}$$

Степінь полінома Π_j на одиницю менший ніж порядок полюса α_j.

Доведення. В околі кожного полюса α_j функція f може бути представлена у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=-r(\alpha_j)}^{\infty} c_{j,k}(z - \alpha_j)^k, \tag{2.36}$$

де $r(\alpha)$ — порядок полюса α_j. Еквівалентно, $f(z) = S_{\alpha_j}(z) + H_{\alpha_j}(z)$, де H_{α_j} — аналітична в α_j, а $S_{\alpha_j} := N_{\alpha_j}(z)/(z-\alpha_j)^{r(\alpha_j)}$ для деякого полінома N_{α_j}. Поклавши $S(z) := \sum_{j=1}^{m} S_{\alpha_j}(z)$ та $H(z) := \sum_{j=1}^{m} H_{\alpha_j}(z)$, отримаємо представлення

$$f(z) = S(z) + H(z),$$

де S — раціональна функція, а H — аналітична в $|z| \le R$. Отже,

$$[z^n]f(z) = [z^n]S(z) + [z^n]H(z).$$

Коефіцієнт при z^n функції $S(z)$ визначається теоремою 2.6.5 і дається сумою $\sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n)\alpha_j^{-n}$ в формулі (2.35). Залишається показати, що

$$[z^n]H(z) = \mathcal{O}(R^{-n}), \;\; n \to \infty.$$

Оскільки H аналітична в $|z| \le R$, то можна застосувати формулу Коші 3.4 з контуром $\mathcal{C} := \{z : |z| = R\}$:

$$\begin{aligned} |[z^n]H(z)| &= \Big|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}} \frac{H(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \frac{H(Re^{\mathrm{i}\phi})}{(Re^{\mathrm{i}\phi})^{n+1}} R\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi\Big| \\ &\le \frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} |H(Re^{\mathrm{i}\phi})|\mathrm{d}\phi \le R^{-n}\sup_{|z|=R}|H(z)| = \mathcal{O}(R^{-n}). \end{aligned}$$

Доведення завершено. □

Приклад 2.6.9. Нехай послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задана рекурентним співвідношенням

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k-1} + a_{n-k-1}), \quad n \ge 2. \tag{2.37}$$

Знайдемо асимптотику a_n при $n \to \infty$. Маємо такі рівності

$$(n-1)a_n = 2\sum_{k=0}^{n-2} a_k, \quad n \ge 2; \qquad na_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad n \ge 1.$$

Безпосередньою підстановкою переконуємось, що перша рівність виконується також при $n = 1$. Таким чином, віднявши від другої рівності першу, отримаємо рекуренте співвідношення глибини 2:

$$na_{n+1} = (n-1)a_n + 2a_{n-1}, \quad n \ge 1, \tag{2.38}$$

з початковими умовами $a_0 = 0$ та $a_1 = 1$. Покладемо $\phi(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Домножимо обидві частини рівності (2.38) на t^{n-1} та просумуємо ці рівності по всім $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^{n-1}. \tag{2.39}$$

Враховуючи рівності

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\phi(t)}{t} - 1\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1}\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}t^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} na_{n+1}t^{n-1}$$

та

$$\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\phi(t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n t^{n-1},$$

отримуємо диференціальне рівняння відносно функції ϕ:

$$\frac{t\phi'(t) - \phi(t)}{t^2} = \phi'(t) - \frac{\phi(t)}{t} + 2\phi(t),$$

що еквівалентно

$$t(1-t)\phi'(t) = (2t^2 - t + 1)\phi(t),$$

або

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{2t^2 - t + 1}{t(1-t)} = -2 + \frac{2}{1-t} + \frac{1}{t}. \tag{2.40}$$

Інтегруючи це рівняння, маємо

$$\ln \phi(t) = -2t - 2\ln(1-t) + \ln t + C \Rightarrow \phi(t) = C_1 \frac{te^{-2t}}{(1-t)^2}.$$

Невідому константу можна визначити з умови $\phi'(0) = a_1 = 1$, що дає $C_1 = 1$.

Для знаходження асимптотики a_n при $n \to \infty$ застосуємо сингулярний аналіз до твірної функції $\phi(t)$. Зрозуміло, що функція ϕ є мероморфною та

$$\phi(z) \sim e^{-2}(1-z)^{-2}, \quad z \to 1,$$

тому згідно з теоремою 2.6.8

$$a_n \sim \frac{n}{e^{-2}}.$$

2.6.3 Сингулярний аналіз алгебраїко-логарифмічних функцій

В попередньому розділі ми вивчили методи сингулярного аналізу раціональних та мероморфних функцій. Єдиним типом особливих точок, з якими ми мали справу, були полюси. Цей факт відображався в характері асимптотичних розкладів поблизу осбливих точок, які містили члени

вигляду $(1-z/\zeta)^{-r}$, $r \in \mathbb{N}$. Як ми бачили, це породжувало члени вигляду $\zeta^{-n}n^{r-1}$ в асимптотичних розкладах відповідних послідовностей.

В цьому розділі ми поширимо методи сингулярного аналізу на клас функцій, що мають особливі точки іншого характеру ніж полюси, а саме, ми розглянемо функції в асимптотичний розклад яких входять вирази вигляду

$$(1-z/\zeta)^{-\alpha}\Big(\ln\frac{1}{1-z/\zeta}\Big)^{\beta},$$

для деяких (в загальному випадку комплексних) α, β. Зрозуміло, що в цьому випадку ζ, взагалі кажучи, може бути особливої точкою многозначного характеру — точкою вітвлення алгебраїчного або логарифмічного типу.

Для ілюстрації методів цього розділу ми почнемо з простого твердження.

Теорема 2.6.10. *Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, $-\alpha \notin \mathbb{N}_0$ та*

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha}.$$

Тоді

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e_k}{n^k}\Big),$$

де e_k — поліном степеня $2k$ відносно α. Зокрема,

$$[z^n]f(z) = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(3\alpha-1)}{24n^2}+\mathcal{O}(n^{-3})\Big). \quad (2.41)$$

Доведення. Згідно з формулою Коші для коефіцієнтів ряду Тейлора

$$f_n := [z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}}(1-z)^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}}, \quad (2.42)$$

де $\mathcal{C}$ — довільний достатньо малий контур, що містить початок координат.

Розпочнемо з простого конутра $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}$ (див. Рис. 2.1 зліва), деформуємо його та отримаємо новий контур $\mathcal{C}_1$ (див. Рис. 2.1 в центрі), який складається з дуги кола радіуса $R > 1$ та «петлі», яка

обходить промінь $z \geq 1$. Помітимо, що підінтегральний вираз у (2.42) є $\mathcal{O}(R^{-n})$ при $R \to \infty$. Перейшовши до границі по $R \to \infty$, отримаємо контур Ганкеля (див. Рис. 2.1 справа), який стартує у $+\infty$ у нижній півплощині, обходить за годинниковою стрілкою точку $z = 1$ та повертається на $+\infty$ у верхній півплощині. Цю криву ми і візьмемо у якості контура інтегрування в формулі (2.42), а саме покладемо

$$\mathcal{C} := \mathcal{H}(n,1) = \mathcal{H}^-(n,1) \cup \mathcal{H}^+(n,1) \cup \mathcal{H}^\circ(n,1),$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^-(n,1) &= \{z \in \mathbb{C} : z = w - \frac{\mathrm{i}}{n},\ w \geq 1\},\\
\mathcal{H}^+(n,1) &= \{z \in \mathbb{C} : z = w + \frac{\mathrm{i}}{n},\ w \geq 1\},\\
\mathcal{H}^\circ(n,1) &= \{z \in \mathbb{C} : z = 1 - \frac{e^{\mathrm{i}\phi}}{n},\ w \geq 1, \phi \in [-\pi/2, \pi/2]\}.
\end{aligned}$$

Зробимо в інтегралі (2.42) заміну змінної $z = 1 + \frac{w}{n}$:

$$f_n = \frac{n^{\alpha-1}}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathcal{H}(1,0)} (-w)^{-\alpha} \Big(1 + \frac{w}{n}\Big)^{-n-1} \mathrm{d}w, \tag{2.43}$$

де контур Ганкеля $\mathcal{H}(1,0)$ обходить точку 0 та розташований на відстані 1 від додатної півпрямої. Розіб'ємо контур $\mathcal{H}(1,0)$ на дві частини $\mathcal{H}'$ та $\mathcal{H}''$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}' &:= \{z \in \mathcal{H}(1,0) : \mathrm{Re}(z) \leq \ln^3 n\},\\
\mathcal{H}'' &:= \{z \in \mathcal{H}(1,0) : \mathrm{Re}(z) > \ln^3 n\}.
\end{aligned}$$

Спочатку оцінимо інтеграл по $\mathcal{H}''$. Для цього помітимо, що для довільного фіксованого $b < n$ функція дійсного аргументу

$$t \mapsto t^b \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^{-(n+1)}$$

не зростає при $t \geq \frac{bn}{n-b}$, а отже, для досить великих n,

$$\sup_{t \geq \ln^3 n} \Big(t^b \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^{-(n+1)}\Big) = \ln^{3b} n \Big(1 + \frac{\ln^3 n}{n}\Big)^{-(n+1)} = \mathcal{O}(\exp(-\ln^2 n)). \tag{2.44}$$

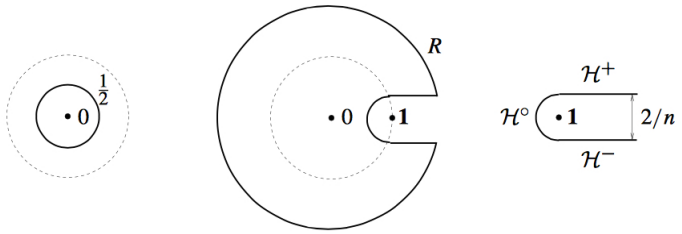

Рис. 2.1: Контури, що використовуються в доведенні теореми 2.6.10.

Маємо

$$\int_{\mathcal{H}''}(-w)^{-\alpha}\Big(1+\frac{w}{n}\Big)^{-n-1}\mathrm{d}w$$
$$=\int_{\ln^3 n}^{+\infty}(-t-\mathrm{i})^{-\alpha}\Big(1+\frac{t+\mathrm{i}}{n}\Big)^{-n-1}\mathrm{d}t-\int_{\ln^3 n}^{+\infty}(-t+\mathrm{i})^{-\alpha}\Big(1+\frac{t-\mathrm{i}}{n}\Big)^{-n-1}\mathrm{d}t.$$

Покажемо, що модуль першого з цих інтегралів є $\mathcal{O}(\exp(-\ln^2 n))$, така сама оцінка для другого доданку доводиться аналогічно. Отже,

$$\Big|\int_{\ln^3 n}^{+\infty}(-t-\mathrm{i})^{-\alpha}\Big(1+\frac{t+\mathrm{i}}{n}\Big)^{-n-1}\mathrm{d}t\Big|\le\int_{\ln^3 n}^{+\infty}\Big|(t+\mathrm{i})^{-\alpha}\Big|\Big|1+\frac{t+\mathrm{i}}{n}\Big|^{-n-1}\mathrm{d}t$$
$$\le\int_{\ln^3 n}^{+\infty}\Big|(t+\mathrm{i})^{-\alpha}\Big|\Big|1+\frac{2t}{n}\Big|^{-(n+1)/2}\mathrm{d}t.$$

Оберемо b таким, що $\int_1^\infty|(t+\mathrm{i})^{-\alpha}|t^{-b}\mathrm{d}t<\infty$, тоді

$$\int_{\ln^3 n}^{+\infty}\Big|(t+\mathrm{i})^{-\alpha}\Big|\Big|1+\frac{2t}{n}\Big|^{-(n+1)/2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{\ln^3 n}^{+\infty}\Big|(t+\mathrm{i})^{-\alpha}\Big|t^{-b}\Big(t^b\Big|1+\frac{2t}{n}\Big|^{-(n+1)/2}\Big)\mathrm{d}=\mathcal{O}(\exp(-\ln^2 n))$$

з огляду на (2.44).

Таким чином, з формули (2.43) маємо

$$f_n=\frac{n^{\alpha-1}}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}'}(-w)^{-\alpha}\Big(1+\frac{w}{n}\Big)^{-n-1}\mathrm{d}w+\mathcal{O}(n^{\alpha-1}\exp(-\ln^2 n)).$$

Тепер розглянемо інтеграл по контуру $\mathcal{H}'$, має місце асимптотичний розклад

$$\Big(1+\frac{w}{n}\Big)^{-(n+1)}=e^{-(n+1)\ln(1+w/n)}$$
$$=e^{-w}\Big[1+\frac{w^2-2w}{n}+\frac{3w^4-20w^3+24w^2}{24n^2}+\dots\Big],\qquad(2.45)$$

при чому, оскільки $w/n = \mathcal{O}(\ln^3 n/n)$ для $w \in \mathcal{H}'$, то вказаний асимптотичний розклад виконується *рівномірно по* $w \in \mathcal{H}'$. Наприклад, оцінка

$$\Big(1+\frac{w}{n}\Big)^{-(n+1)} = e^{-w}\Big[1+\frac{w^2-2w}{n}+\frac{3w^4-20w^3+24w^2}{24n^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big] \quad (2.46)$$

є рівномірною по $w \in \mathcal{H}'$. З її допомогою, отримаємо формулу (2.41), повний асимптотичний розклад можна отримати взявши повний розклад (2.45).

Підставляючи розклад (2.46) в інтеграл по $\mathcal{H}'$, отримуємо

$$\int_{\mathcal{H}'}(-w)^{-\alpha}\Big(1+\frac{w}{n}\Big)^{-n-1}\mathrm{d}w$$
$$= \int_{\mathcal{H}'}(-w)^{-\alpha}e^{-w}\Big[1+\frac{w^2-2w}{n}+\frac{3w^4-20w^3+24w^2}{24n^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]\mathrm{d}w.$$

З міркувань, аналогічних тим, що були використані вище для оцінки інтегралу по $\mathcal{H}''$, робимо висновок, що

$$\int_{\mathcal{H}''}(-w)^{-\alpha}e^{-w}\Big[1+\frac{w^2-2w}{n}+\frac{3w^4-20w^3+24w^2}{24n^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]\mathrm{d}w$$
$$= \mathcal{O}(\exp(-\ln^2 n)),$$

а отже, комбінуючи всі отримані оцінки, маємо

$$f_n = \frac{n^{\alpha-1}}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}(1,0)}(-w)^{-\alpha}e^{-w}\Big[1+\frac{w^2-2w}{n}+\frac{3w^4-20w^3+24w^2}{24n^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]\mathrm{d}w,$$

де члени вигляду $\mathcal{O}(n^{\alpha-1}\exp(-\ln^2 n))$ та $\mathcal{O}(\exp(-\ln^2 n))$ поглинаються $\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$.

Залишається застосувати формулу Ганкеля (див. Додаток 3.2) для гамма функції[4]

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}(1,0)}(-t)^{-z}e^{-t}\mathrm{d}t,$$

яка вірна для всіх $z \in \mathbb{C}$, $-z \notin \mathbb{N}_0$ з якої отримуємо

$$f_n = n^{\alpha-1}\Big[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}+\frac{2}{\Gamma(\alpha-1)}\Big)+\frac{1}{24n^2}\Big(\frac{3}{\Gamma(\alpha-4)}$$
$$+\frac{20}{\Gamma(\alpha-3)}+\frac{24}{\Gamma(\alpha-2)}\Big)\Big]+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

[4]Знак "мінус"у наведеній нижче формулі зник, оскільки контур $\mathcal{H}(1,0)$ обходиться у протилежному напрямку у порівнянні зі стандартним контуром Ганкеля.

звідки (2.41) отримуємо застосуванням рівності

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доведення завершено. □

Зауваження 2.6.11. Як видно з офрмулювання, твердження теореми 2.6.10 виконується й для комплексних α. Цікавим фактом є поява *осциляцій* у асимтпотиках $[z^n]f(z)$ при $\alpha \notin \mathbb{R}$. Нехай, наприклад $\alpha = \pm\mathrm{i}$, тоді

$$f(z) = \cos(-\ln(1-z)) = \frac{e^{-\mathrm{i}\ln(1-z)} + e^{\mathrm{i}\ln(1-z)}}{2} = \frac{(1-z)^{-\mathrm{i}} + (1-z)^{\mathrm{i}}}{2},$$

а отже

$$\begin{aligned}
[z^n]f(z) &= \frac{1}{2}([z^n](1-z)^{-\mathrm{i}} + [z^n](1-z)^{\mathrm{i}}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{n^{\mathrm{i}-1}}{\Gamma(\mathrm{i})}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) + \frac{n^{-\mathrm{i}-1}}{\Gamma(-\mathrm{i})}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{2n}\Big(\frac{n^{\mathrm{i}}}{\Gamma(\mathrm{i})} + \frac{n^{-\mathrm{i}}}{\Gamma(-\mathrm{i})}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{P(\ln n)}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

де $P(\cdot)$ — періодична неперервна функція.

Базовий принцип, який використовувався у доведенні теореми 2.6.10 може бути досить просто поширений на широкий клас функцій, які крім степеневих множників містять, наприклад логарифми.

Теорема 2.6.12. *Нехай* $\alpha \in \mathbb{C}$, $-\alpha \notin \mathbb{N}_0$, $\beta \in \mathbb{C}$ *та*

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha}\Big(\frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}\Big)^{\beta}.$$

Тоді

$$f_n := [z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\ln n)^{\beta}\Big[1 + \frac{C_1}{\ln n} + \frac{C_2}{\ln^2 n} + \dots\Big], \tag{2.47}$$

де $C_k = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}\Gamma(\alpha)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=\alpha}$.

Якщо $-\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\beta \notin \mathbb{N}_0$, *то*

$$f_n := [z^n]f(z) \sim n^{\alpha-1}(\ln n)^\beta \Big[\frac{D_1}{\ln n} + \frac{D_2}{\ln^2 n} + \dots\Big], \tag{2.48}$$

де $D_k := \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|_{s=\alpha}$.

Якщо $\alpha = -m$, $\beta = k$ *для* $m, k \in \mathbb{N}_0$, *то*

$$f_n := [z^n]f(z) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\Big((n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots\alpha)\Big)\Big|_{\alpha=-m}. \tag{2.49}$$

Схема доведення. Нехай $-\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Основний асимптотичний розклад, що використовується у доведенні є таким

$$\begin{aligned} & f\Big(1+\frac{t}{n}\Big)\Big(1+\frac{t}{n}\Big)^{-n-1} \\ & \quad\sim\ e^{-t}\Big(\frac{-n}{t}\Big)^\alpha\Big(\ln\Big(\frac{-n}{t}\Big)\Big)^\beta \\ & \quad=\ e^{-t}(-t)^{-\alpha}n^\alpha(\ln n)^\beta\Big(1-\frac{\ln(-t)}{\ln n}\Big)^\beta \\ & \quad=\ e^{-t}(-t)^{-\alpha}n^\alpha(\ln n)^\beta\Big(1-\beta\frac{\ln(-t)}{\ln n}+\frac{\beta(\beta-1)}{2!}\Big(\frac{\ln(-t)}{\ln n}\Big)^2+\dots\Big). \end{aligned}$$

Підстановка цього розкладу у інтегральну формулу Коші, його почленне інтегрування та використання формули[5]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}(1,0)}(-t)^{-s}e^{-t}(\ln(-t))^k\mathrm{d}t \\ & \qquad = (-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\Big[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}(1,0)}(-t)^{-s}e^{-t}\mathrm{d}t\Big] = (-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{\Gamma(s)}, \end{aligned}$$

дає розклад (2.47).

Нехай $-\alpha \in \mathbb{N}_0$ та $\beta \notin \mathbb{N}_0$, тоді формулу (2.48) можна отримати з (2.47), якщо покласти $1/\Gamma(\alpha) := 0$ при цьому перший член розкладу скорочується, а в решті членів множник $\Gamma(\alpha)$ в знаменнику скорочується з множником $\Gamma(\alpha)$ в константах C_k.

У випадку $\beta \in \mathbb{N}_0$ (і довільного $\alpha \in \mathbb{C}$) міркуємо так. З формули Коші

$$[z^n](1-z)^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\{z:|z|=1/2\}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2^{n-1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(1-\frac{e^{\mathrm{i}\phi}}{2}\Big)^{-\alpha}e^{-\mathrm{i}n\phi}\mathrm{d}\phi$$

[5]Вона отримана диференціюванням під знаком інтеграла представлення Ганкеля для гамма функції.

та теореми Лейбніца про диференціювання інтегралів, що залежать від параметру, випливає, що оператори $[z^n]$ та $\partial^k/\partial\alpha^k$ комутують, а отже

$$\begin{aligned}
[z^n](1-z)^{-\alpha}\Big(\ln\frac{1}{1-z}\Big)^k &= [z^n]\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}(1-z)^{-\alpha} \\
&= \frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}[z^n](1-z)^{-\alpha} = \frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k}\Big((n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdots\alpha)\Big).
\end{aligned}$$

Доведення завершено. □

Приклад 2.6.13. Типовий приклад застосування теореми 2.6.12 це асимптотичний розклад

$$[z^n](1-z)^{-1/2}\Big(\frac{1}{z}\ln\Big(\frac{1}{1-z}\Big)\Big)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\Big(1-\frac{\gamma+2\ln 2}{\ln n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\ln^2 n}\Big)\Big),$$

де γ — стала Ейлера.

Наша основна мета — навчитись отримувати асимптотику послідовності, знаючи асимптотику її твірної функції поблизу особливої точки (точок). Фактично, основним завданням, на розв'язання якого ми спрямуємо зараз наші зусилля є доведення так званих *теорем переходу*, які дозволяють оцінювати похибки (у вигляді $\mathcal{O}$- чи o-оцінок) у асимптотичних розкладах послідовностей, маючи похибки (також у вигляді $\mathcal{O}$- чи o-оцінок) у асимптотичних розкладах твірних функцій поблизу особливої точки (точок).

Основним поняттям, яке використовується у сингулярному аналізі є поняття Δ-аналітичності. Зафіксуємо $\phi \in (0, \pi/2)$ та $R > 1$ та розглянемо відкриту множину (див. Рис. 2.2)

$$\Delta(\phi, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ z \neq 1,\ |arg(z-1)| > \phi\}.$$

Означення 2.6.14. Множина $A \subset \mathbb{C}$ називається:

- Δ-областю в точці 1, якщо $A = \Delta(\phi, R)$ для деяких R та ϕ.

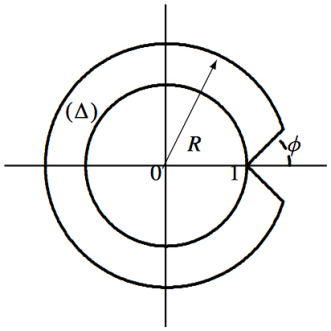

Рис. 2.2: Область $\Delta(\phi, R)$.

- Δ-областю в точці ζ, якщо вона є образом Δ-області в точці 1 при відображенні $z \mapsto \zeta z$.

Функція називається Δ-аналітичною в точці $\zeta \in \mathbb{C}$, якщо вона аналітична в деякії Δ-області в точці ζ.

Основна *теорема переходу* сформульована нижче.

Теорема 2.6.15. *Нехай $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а f є Δ-аналітичною в точці 1 і нехай Δ — область її Δ-аналітичності.*

- *Якщо функція f задовольняє умову*

$$f(z) = \mathcal{O}\Big((1-z)^{-\alpha}\Big(\ln\frac{1}{1-z}\Big)^{\beta}\Big), \quad z \to 1, \quad z \in \Delta,$$

  то

$$[z^n]f(z) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}(\ln n)^{\beta}), \quad n \to \infty.$$

- *Якщо функція f задовольняє умову*

$$f(z) = o\Big((1-z)^{-\alpha}\Big(\ln\frac{1}{1-z}\Big)^{\beta}\Big), \quad z \to 1, \quad z \in \Delta,$$

  то

$$[z^n]f(z) = o(n^{\alpha-1}(\ln n)^{\beta}), \quad n \to \infty.$$

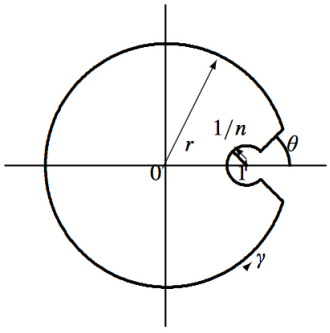

Рис. 2.3: Контур, що використовується у доведенні теореми 2.6.15.

Доведення. Нехай $\Delta = \Delta(\phi, R)$. Оберемо $r \in (1, R)$, $\theta \in (\phi, \pi/2)$ та побудуємо контур (див. Рис. 2.3) $\gamma = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$, де

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = n^{-1},\ |arg(z-1)| \geq \theta\},\\
\mathcal{C}_2 &= \{z \in \mathbb{C} : n^{-1} \leq |z-1|,\ |z| \leq r,\ arg(z-1) = \theta\},\\
\mathcal{C}_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = r,\ |arg(z-1)| \geq \theta\},\\
\mathcal{C}_4 &= \{z \in \mathbb{C} : n^{-1} \leq |z-1|,\ |z| \leq r,\ arg(z-1) = -\theta\}.
\end{aligned}$$

За побудовою контур γ лежить всередині Δ, тому за теоремою Коші

$$f_n := [z^n]f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z) \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathcal{C}_i} f(z) \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} =: \sum_{i=1}^{4} f_n^{(i)}.$$

Для доведення першої частини теореми покажемо, що для всіх $i = 1, 2, 3, 4$ виконується оцінка $f_n^{(i)} = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}(\ln n)^\beta)$.

Внутрішнє коло $\mathcal{C}_1$. Зробимо заміну змінної $z = 1 + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{n}$, тоді

$$|f_n^{(1)}| = \left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\theta \leq |t| \leq \pi} \frac{f\left(1 + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{n}\right)^{n+1}} \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi n} \int_{\theta \leq |t| \leq \pi} \frac{\left|f\left(1 + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{n}\right)\right|}{\left|\left(1 + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{n}\right)^{n+1}\right|} \mathrm{d}t.$$

Знаменник підінтегрального виразу прямує до $\exp(e^{\mathrm{i}t})$ рівномірно по $t \in [-\pi, \pi]$, а чисельник є $\mathcal{O}(n^\alpha(\ln n)^\beta)$ за припущенням, тому

$$|f_n^{(1)}| = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}(\ln n)^\beta).$$

Відрізки $\mathcal{C}_2$ та $\mathcal{C}_4$. Розглянемо перший відрізок $\mathcal{C}_2$, оцінка для другого відрізка отримується аналогічно. Покладемо $\omega = e^{\mathrm{i}\theta}$ та зробимо заміну змінної $z = 1 + \frac{\omega t}{n}$, тоді

$$f_n^{(2)} = \frac{\omega}{2\pi \mathrm{i} n} \int_1^{\rho n} f\Big(1 + \frac{\omega t}{n}\Big)\Big(1 + \frac{\omega t}{n}\Big)^{-n-1} \mathrm{d}t, \tag{2.50}$$

де ρ – додатній корінь рівняння $|1 + \rho e^{\mathrm{i}\theta}| = r$. Оскільки

$$\Big|1 + \frac{\omega t}{n}\Big| \geq 1 + \mathrm{Re}\Big(\frac{\omega t}{n}\Big) = 1 + \frac{t\cos\theta}{n},$$

то

$$\begin{aligned} |f_n^{(2)}| &\leq \frac{1}{2\pi n} \int_1^{\ln^2 n} \Big|f\Big(1 + \frac{\omega t}{n}\Big)\Big|\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n-1} \mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2\pi n} \int_{\ln^2 n}^{\rho n} \Big|f\Big(1 + \frac{\omega t}{n}\Big)\Big|\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n-1} \mathrm{d}t \\ &=: f_n^{(21)} + f_n^{(22)}. \end{aligned}$$

За припущенням маємо при $t \in [1, \ln^2 n]$

$$\Big|f\Big(1 + \frac{\omega t}{n}\Big)\Big| \leq K\Big(\frac{n}{t}\Big)^{\alpha} M(n),$$

для деякої константи $K > 0$, де $M(n) := \sup_{t\in[1,\ln^2 n]} \Big|\ln\Big(-\frac{n}{\omega t}\Big)\Big|^{\beta}$. Легко переконатись, що

$$M(n) \sim \ln^{\beta} n, \quad n \to \infty,$$

тому для деякої константи $K_1 > 0$ та великих n маємо

$$f_n^{(21)} \leq K_1 n^{\alpha-1} (\ln n)^{\beta} \int_1^{\infty} t^{-\alpha}\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n} \mathrm{d}t.$$

Оскільки $\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n} \searrow e^{-t\cos\theta}$ при $n \to \infty$, то

$$J_n := \int_1^{\infty} t^{-\alpha}\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n} \mathrm{d}t \searrow \int_1^{\infty} t^{-\alpha} e^{-t\cos\theta} \mathrm{d}t < \infty$$

при $n \to \infty$, а отже J_n обмежені зверху для великих n. Таким чином $f_n^{(21)} = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}(\ln n)^{\beta})$.

Для оцінки $f_n^{(22)}$ використаємо грубу лінійну оцінку для $|\ln z|^\beta$, яка справедлива для всіх $z \in \mathbb{C}$, що лежать поза деяким околом нуля:

$$|\ln z|^\beta \le K_1|z| + K_2, \quad |z| > \delta > 0. \tag{2.51}$$

При $t \in [\ln^2 n, \rho n]$ маємо $\left| -\frac{n}{\omega t}\right| = \frac{n}{t} > \rho^{-1}$, тому згідно (2.51) для підхожої константи $K_3 > 0$

$$f_n^{(22)} \quad \le \quad K_3 \frac{n^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{\ln^2 n}^{\rho n} t^{-\alpha}\Big(K_1 \frac{n}{t} + K_2\Big)\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n-1} \mathrm{d}t.$$

З тривіальної оцінки $K_1 \frac{n}{t} + K_2 = \mathcal{O}(n)$ робимо висновок, що

$$f_n^{(22)} = \mathcal{O}\Big(n^\alpha \int_{\ln^2 n}^{\rho n} t^{-\alpha}\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n-1} \mathrm{d}t\Big).$$

Інтеграл під знаком $\mathcal{O}$ можна оцінити так:

$$\begin{aligned}\int_{\ln^2 n}^{\rho n} t^{-\alpha}\Big(1 + \frac{t\cos\theta}{n}\Big)^{-n-1} \mathrm{d}t \quad &\le \quad \Big(1 + \frac{\ln^2 n\cos\theta}{n}\Big)^{-n-1} \int_{\ln^2 n}^{\rho n} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \\ &\sim \quad \exp(-\cos\theta \ln^2 n) \int_{\ln^2 n}^{\rho n} t^{-\alpha}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

що показує експоненційну малість $f_n^{(22)}$.

Зовнішнє коло $\mathcal{C}_3$. На цій частині контура $f(z) = \mathcal{O}(1)$, а z^{-n-1} має порядок r^{-n-1}, тому $f_n^{(3)}$ є експоненційно малим. Отже, перша частина теореми доведена. Доведення другої частини проходить аналогічно, деталі можна знайти у наслідку 4 статті [5]). □

Зауваження 2.6.16. Умова $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ не зменшує загальності. Дійсно, нехай наприклад виконується співвідношення

$$f(z) = \mathcal{O}((1-z)^{-(a+\mathrm{i}b)}), \quad z \to 1, \quad z \in \Delta, \tag{2.52}$$

для деяких $a, b \in \mathbb{R}$. Оскільки (нагадаємо, що ми всюди обираємо головні вітки логарифмічної функції)

$$\begin{aligned}|(1-z)^{-(a+\mathrm{i}b)}| \quad &= \quad |e^{-(a+\mathrm{i}b)\ln(1-z)}| = |e^{-(a+\mathrm{i}b)(\ln|1-z| + \mathrm{i}arg(1-z))}| \\ &= \quad e^{-a\ln|1-z| + b\cdot arg(1-z)} \asymp |1-z|^{-a}\end{aligned}$$

при $z \to 1$, а отже (2.52) еквівалетно

$$f(z) = \mathcal{O}((1-z)^{-a}), \quad z \to 1, \quad z \in \Delta.$$

Таким чином у $\mathcal{O}$- та o-оцінках, які використовуються в цьому розділі, показники степенів можна вважати дійсними.

Наслідок 2.6.17. Нехай $f(z)$ є Δ-аналітичною в точці 1 та

$$f(z) \sim (1-z)^{-\alpha}, \quad z \to 1, \quad z \in \Delta$$

для деякого $\alpha \in \mathbb{C}$, $-\alpha \notin \mathbb{N}_0$, тоді

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Доведення. Покладемо $g(z) := (1-z)^{-\alpha}$, тоді

$$f(z) \sim g(z) \Leftrightarrow f(z) = g(z) + o(g(z))$$

при $z \to 1$, $z \in \Delta$. Залишається затсосувати теорему 2.6.10 до першого доданку та другу частину теореми 2.6.15 до другого доданку. □

Тепер ми маємо весь необхідний інструментарій для опису процесу сингулярного аналізу твірних функцій. Розглянемо множину функцій

$$\mathcal{S} = \{(1-z)^{-\alpha}\lambda(z)^{\beta} | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}, \quad \lambda(z) := \frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}.$$

Теорема 2.6.18 (Сингулярний аналіз у випадку однієї домінантної особливої точки)**.** *Нехай $f(z)$ є аналітичною в 0 функцією, а ζ — єдина особлива точка $f(z)$ на границі круга аналітичності.*[6] *Припустимо, що $f(z)$ може бути аналітично продовжена в область $\zeta\Delta_0$, для деякої Δ_0 — Δ-області в точці 1. Припустимо, що існують дві функції σ та τ такі, що σ є скінченною лінійною комбінацією функцій з $\mathcal{S}$, а $\tau \in \mathcal{S}$ та*

$$f(z) = \sigma(z/\zeta) + \mathcal{O}(\tau(z/\zeta)), \quad z \to \zeta, \quad z \in \zeta\Delta_0.$$

[6]Тобто, на колі радіуса r_1, де r_1 — радіус збіжності ряду Маклорена $f(z)$.

Тоді коефіцієнти $f_n := [z^n]f(z)$ *задовольняють асимптотичну оцінку*

$$f_n = \zeta^{-n}\sigma_n + \mathcal{O}(\zeta^{-n}\tau_n^*), \quad n \to \infty,$$

де $\sigma_n := [z^n]\sigma(z)$ *і визначаються теоремами 2.6.10 та 2.6.12, а* $\tau_n^* = n^{a-1}\ln^b n$*, якщо* $\tau(z) = (1-z)^{-a}\lambda^b(z)$*.*

Доведення. Покладемо $g(z) := f(\zeta z)$, тоді 1 є єдиною особливою точкою функції $g(z)$ в крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, ця функція є Δ-аналітичною (аналітичною в області Δ_0) та задовольняє умову

$$g(z) = \sigma(z) + \mathcal{O}(\tau(z)), \quad z \to 1, \quad z \in \Delta_0.$$

Залишається застосувати першу частину теореми 2.6.15 до $\mathcal{O}$-члену і помітити, що $[z^n]f(z) = \zeta^{-n}[z^n]g(z)$. □

Схема сингулярного аналізу

Нехай задана функція $f(z)$ асимптотичну поведінку коефіцієнтів якої потрібно визначити.

1a) Знайти домінантну (найближчу до початку координат) особливу точку ζ й переконатись, що на колі збіжності інших особливих точок немає.

1b) Перевірити, що $f(z)$ може бути аналітично продовжена в область вигляду $\zeta\Delta_0$, де Δ_0 — Δ-область, зображена на Рис. 2.2.

2) Знайти асимптотичний розклад функції $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \sigma(z/\zeta) + \mathcal{O}(\tau(z/\zeta)), \quad z \to \zeta, \quad z \in \Delta_0,$$

де $\tau(z) = o(\sigma(z))$. Метод сингулярного аналізу працює якщо функції σ та τ вдається знайти у формі, вказаній у теоремі 2.6.18.

3) За допомогою теорем 2.6.10 та 2.6.12 знайти $\sigma_n := [z^n]\sigma(z)$; використавши теорему 2.6.15 побудувати оцінку для залишкового члена $\tau_n^* := [z^n]\tau(z)$ та отримати розклад

$$[z^n]f(z) = \zeta^{-n}\sigma_n + \mathcal{O}(\zeta^{-n}\tau_n^*), \quad n \to \infty.$$

Розділ 3

Додатки

3.1 Додаток А. Дійсний аналіз

3.1.1 Теорема про неявну функцію

Припустимо, що дійсні змінні x та y пов'язані рівнянням, яке можна записати у вигляді

$$F(x, y) = 0, \tag{3.1}$$

де F — функція двох змінних задана в деякій області. Якщо для кожного фіксованого x в деякому проміжку $[a, b]$ існує одне чи декілька значень y, таких що пари (x, y) задовольняють рівняння (3.1), то цим визначається однозначна або багатозначна функція $y = f(x)$ така, що

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in [a, b].$$

Кажуть, що рівняння (3.1) неявно задає функцію $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$. Наступна теорема дає достатні умови існування неявної функції в термінах функції F.

Теорема 3.1.1. *Нехай функція F визначена і неперервна разом зі своїми похідними $\partial F/\partial x$ та $\partial F/\partial y$ в околі деякої точки (x_0, y_0). Нехай*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Тоді

а) знайдеться прямокутник $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta', y_0 + \delta']$ такий, що в ньому рівняння (3.1) неявно задає функцію $y = f(x)$;

b) $y_0 = f(x_0)$;

c) функція $y = f(x)$ *є неперервною разом зі своєю похідною на* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

3.1.2 Формула Валліса

Покладемо $I(n) := \int_0^\pi \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^{n-1} x \mathrm{d}\cos x$ для $n \in \mathbb{N}$. Інтегруючи частинами, отримаємо при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} I(n) &= \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \cos^2 x \sin^{n-2} x \mathrm{d}x \\ &= (n-1) \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \mathrm{d}x \\ &= (n-1)I(n-2) - (n-1)I(n) = \frac{n-1}{n} I(n-2). \end{aligned}$$

Нехай $x_n := I(2n)/I(2n+1)$, тоді $x_0 = I(0)/I(1) = \pi/2$, а для $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \frac{I(2n)}{I(2n+1)} = \frac{(2n-1)(2n+1)I(2n-2)}{(2n)^2 I(2n-1)} = \frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2} x_{n-1},$$

звідки

$$x_n = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2}$$

З іншого боку, оскільки

$$1 \leq x_n \leq \frac{(2n+1)I(2n)}{(2n)I(2n-1)} \leq \frac{2n+1}{2n} \to 1, \quad n \to \infty,$$

то $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Спрямовуючи $n \to \infty$ в рівності (3.2), отримуємо *формулу Валліса*

$$\pi/2 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}.$$

3.2 Додаток Б. Комплексний аналіз

У цьому підрозділі зібрані основні означення та твердження про аналітичні функції. Їх доведення можна знайти у будь-якому підручнику з теорії функцій комплексної змінної, наприклад [14] або [16].

У подальшому в цьому підрозділі розглядаються комплекснозначні функції комплексного аргумента, тобто відображення (необов'язково однозначі) з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Термін *область* використовується для позначення відкритої, зв'язної підмножини $\mathbb{C}$. Для заданої області D її *границею* ∂D називається множина точок з доповнення D таких, що будь-який їх окіл перетинається з D. Замиканням D називається множина $\overline{D} := D \cup \partial D$. В подальшому вважатимемо, що границя ∂D скаладється зі скінченної кількості кусково-гладких ліній, кусково-гладких розрізів та точок.

Означення 3.2.1. Функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, визначена в деякому околі точки $\zeta \in \mathbb{C}$, називається диференційовною в точці $\zeta \in \mathbb{C}$, якщо існує границя

$$f'(\zeta) := \lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}, \tag{3.3}$$

яка називається похідною функції f в точці ζ. Функція називається диференційовною в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Теорема 3.2.2. *Для того щоб функція f була диференційовною в точці $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$ необхідно і достатньо щоб функції $u(x, y) = \mathrm{Re} f(x + \mathrm{i}y)$ та $v(x, y) = \mathrm{Im} f(x + \mathrm{i}y)$ були диференційовними в точці (ξ, η) та виконувались співвідношення Коші-Рімана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi, y=\eta} = \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{x=\xi, y=\eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=\xi, y=\eta} = -\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=\xi, y=\eta}.$$

Означення 3.2.3. Функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, визначена в деякому околі точки $\zeta \in \mathbb{C}$, називається аналітичною в точці $\zeta \in \mathbb{C}$, якщо f представляється степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n (z - \zeta)^n,$$

що збігається в деякому околі ζ. Функція f аналітична в області D якщо вона аналітична в кожній точці D.

Теорема 3.2.4. *Множина тих $z \in \mathbb{C}$ для яких ряд $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - \zeta)^n$ збігається є кругом радіуса $R \in [0, \infty]$ з центром в точці ζ. В крузі $|z - \zeta| < R$ ряд збігається рівномірно і є аналітичною функцією.*

В наведених нижче теоремах вважається, що всі контури обходяться в *додатному напрямку*, тобто так, що область обмежена контуром залишається *зліва*.

Теорема 3.2.5 (Теорема Коші)**.** *Якщо функція f аналітична в області D та неперервна в $\overline{D}$, то*

$$\int_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Теорема 3.2.6 (Інтегральна формула Коші)**.** *Якщо функція f аналітична в області D та неперервна в $\overline{D}$ то для довільної точки $\zeta \in D$*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(z)}{z-\zeta}\mathrm{d}z.$$

Теорема 3.2.7. *Якщо функція f аналітична в області D та неперервна в $\overline{D}$ то вона має похідні всіх порядків в довільній точці $\zeta \in D$, при цьому*

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.4}$$

та має місце представлення f степеневним рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(z-\zeta)^n,$$

який збігається в кожному крузі $|z-\zeta| < R$, що лежить в D.

Теорема 3.2.8 (Еквівалентність понять аналітичності та диференційовності)**.** *Функція f аналітична в області D тоді й тільки тоді, коли вона диференційовна в D.*

Одним з найважливіших понять теорії аналітичних функцій є *процес аналітичного продовження.*

Нехай задано послідовність $D_0, D_1, \ldots, D_n$ однозв'язних областей таких, що кожна пара послідовних областей D_k, D_{k+1} має спільну границю γ_k. Нехай в кожній області D_k задана однозначна аналітична функція f_k. Кажуть, що f_n є аналітичним продовженням f_0 в D_n через заданий

ланцюжок областей, якщо для всіх $k = 0, 1, \ldots, n-1$ функція f_k неперервна в $D_k \cup \gamma_k$, функція f_{k+1} неперервна в $D_{k+1} \cup \gamma_k$ та $f_k(z) = f_{k+1}(z)$ для $z \in \gamma_k$.

Функція f_0 аналітична в області D_0 аналітично продовжується в точку $z^* \notin D$, якщо існує послідовність областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ та функцій $f_1, f_2, \ldots, f_n$, що задоволняють наведеним вище умовам та $z^* \in D_n$.

Нехай функція f є аналітичною в деякому околі точки w_0, $w^* \in \mathbb{C}$ — точка поза цим околом, γ — проста крива, що сполучає w_0 та w^*. Один з методів побудови аналітичного продовження f в w^* називається продовженням вздовж кривої γ та схематично описується такою конструкцією[1]. Розкладемо f у степеневий ряд в околі w_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - w_0)^n. \tag{3.5}$$

Нехай його радіус збіжності $r_0 > 0$, покладемо $D_0 := \{z \in \mathbb{C} : |z - w_0| < r_0\}$. Якщо $w^* \in D_0$, то w^* лежить в області аналітичності f і аналітичне продовження непотрібне. Якщо $w^* \notin D_0$ то оберемо на кривій γ деяку точку w_1 «поблизу» кола ∂D_0. Оскільки функція f аналітична в деякому околі w_1, то вона може бути розкладена в ряд Тейлора в околі цієї точки: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - w_1)^n$. Нехай радіус збіжності цього ряду $r_1 > 0$, покладемо

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - w_1)^n,$$

для всіх $z \in D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - w_1| < r_1\}$. За побудовою $f_1(z) = f_0(z)$ при $z \in D_0 \cap D_1$. Тому, якщо круг D_1 не лежить повністю в D_0, f_1 безпосередньо аналітично продовджує f_0 в D_1. Якщо $w^* \in D_1$ процес завершується, в протилежному випадку знову оберемо точку w_2 на кривій γ, що лежить «поблизу» кола ∂D_1 та розкладемо f_1 в степеневий ряд в околі w_2: $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n (z - w_2)^n$. Нехай радіус збіжності цього ряду $r_2 > 0$, покладемо

$$f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} e_n (z - w_2)^n,$$

[1]Докладна побудова може бути знайдена, наприклад, в главі III книги [14].

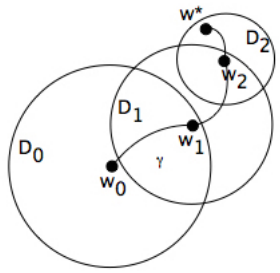

Рис. 3.1: Аналітичне продовження вздовж кривої.

для всіх $z \in D_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z - w_2| < r_2\}$ і т.д. Цей процес можна продовжувати, будуючи послідовність кругів D_k та степеневих рядів, збіжних у них, що задають аналітичне продовження f в w^* (див. Рис. 3.1).

Розглянемо простий приклад, який демонструє основну ідею аналітичного продовження.

Приклад 3.2.9. Розглянемо степеневий ряд

$$f_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k \tag{3.6}$$

який визначає аналітичну в крузі $z \in \mathcal{C}_0 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцію. Побудуємо аналітичне продовження функції f_0 в точку $-2 \notin \mathcal{C}_0$. Візьмемо довільне дійсне число $-1 < a < -1/2$ і покладемо

$$f_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(1-a)^{k+1}}. \tag{3.7}$$

Цей ряд є збіжним у крузі $\mathcal{C}_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < 1 - a\}$ в якому лежить точка -2. Таким чином $f_1(z)$ задає аналітичне продовження $f_0(z)$ в точку -2.

Зауважимо, що процес аналітичного продовження не завжди є можливим.

Приклад 3.2.10. Розглянемо функцію f, що визначена степеневим рядом

$$f(z) := 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n},$$

який, очевидно збігається при $|z| < 1$. Зрозуміло, що $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty$, а тому f не є аналітичною в точці 1. З іншого боку, оскільки

$$f(z) = z^2 + f(z^2),$$

то $\lim_{z\to -1} f(z) = \infty$, тому f не є аналітичною також в точці -1. Аналогічно, оскільки

$$f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4),$$

то f не є аналітичною у всіх точках, що є коренями $z^4 = 1$. Взагалі, будь яка точка ζ така, що $\zeta^{2^n} = 1$ для деякого $n \in \mathbb{N}$ не є точкою аналітичності f. Сукупність таких точок є всюди щільною множиною на одиничному колі $|z| < 1$, а тому функцію f не можна аналітично продвожити за вказаний круг. В такому разі кажуть, що контур $|z| = 1$ є *природною границею* f.

Нехай функція f_0 задана і аналітична в деякій області D_0 та аналітично продовжується хоча б в одну точку $z^* \notin D_0$. Множина всіх можливих аналітичних продовжень по всім можливим ланцюжкам областей задає (можливо неоднозначну) *повну аналітичну функцію* f, що визначена в області, обмеженій природною границею f_0, яка називається областю існування f. Однозначні, аналітичні функції з яких складається f (продовження функції f_0) називаються *гілками* f.

Означення 3.2.11. Нехай a — точка області існування повної аналітичної функції f або границі цієї області. Точка a називаються особливою точкою f, якщо існує хоча б одна гілка f, яка не є аналітичною в a.

Особлива точка a функції f називається ізольованою, якщо існує число $r > 0$ таке, що f аналітично продовжується вздовж будь-якого ланцюжка областей з проколотого околу $0 < |z - a| < r$.

Нехай a — ізольована особлива точка. Розглянемо гілку f_0 функції f аналітичну в деякому колі D_0 з центром в a і розрізом γ_0 вздовж деякого радіуса ($a \in \gamma_0$). Якщо f_0 має однакові значення на різних берегах γ_0, то

a називається *однозначною* особливою точкою, якщо ж ці значення різні, то a називається *точкою розгалуження.*

Особливі точки однозначного характеру поділяються на три типи: *усувні особливі точки, полюси та суттєво особливі точки.* Особлива точка a однозначного характеру називається усувною, якщо існує скінченна границя $\lim_{z\to a} f(z)$. Такі точки не представляють інтересу, оскільки поклавши $f(a) := \lim_{z\to a} f(z)$ отримаємо аналітичну в a функцію f (особливість усувається).

Означення 3.2.12. Точка $a \in D$ називається полюсом порядку n для функції f, якщо існує аналітична в a функція g та такі константи $c_1, c_2, \ldots, c_n$ з $c_n \neq 0$, що

$$f(z) = g(z) + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_n}{(z-a)^n}.$$

Сума $\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_n}{(z-a)^n}$ називається головною частиною функції f в точці a. Якщо $n = 1$, то полюс називається простим.

Визначення полюсу еквіваленте такому: a є полюсом f, якщо $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, тобто $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$.

Означення 3.2.13. Особлива точка однозначної функції f називається *суттєво особливою*, якщо границя $\lim_{z\to a} f(z)$ не існує.

3.3 Додаток В. Гамма функція

Гамма функція входить в розклади, що повсякчас зустічаються в асимптотичному аналізі. В цьому розділі зібрано основні твердження про гамма функцію, як фукнцію комплексного аргумента. Детальний аналіз і доведення можна знайти, наприклад у [16].

Інтегралом Ейлера другого роду називається функція визначена інтегралом

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \mathrm{d}t, \quad s = a + \mathrm{i}b, \tag{3.8}$$

який збігається при $a > 0$, як зрозуміло з представлення

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t &= \int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}(\cos(b\ln t)+\mathrm{i}\sin(b\ln t))\mathrm{d}t\\ &= \Big(\int_0^1+\int_1^\infty\Big)e^{-t}t^{a-1}(\cos(b\ln t)+\mathrm{i}\sin(b\ln t))\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty e^{-e^{-u}}e^{-au}(\cos(bu)-\mathrm{i}\sin(bu))\mathrm{d}u\\ &+ \int_1^\infty e^{-t}t^{a-1}(\cos(b\ln t)+\mathrm{i}\sin(b\ln t))\mathrm{d} < \infty,\end{aligned}$$

в якому остання рівність отримана заміною змінної $u = -\ln t$ в першому інтегралі.

Інтегруванням частинами у формулі (3.8) отримуємо функціональне співвідношення

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \mathrm{Re}s > 0, \tag{3.9}$$

з якого випливає, що функцію Γ, визначену (3.8), можна аналітично продовжити на всю комплексну площину з виколотими точками $0, -1, -2, \ldots$. Точки $-m, m \in \mathbb{N}_0$ є простими полюсами, як випливає з співвідношення

$$\Gamma(s) \sim \frac{(-1)^m}{m!}\frac{1}{s+m}, \quad s \to -m,$$

що є простим наслідком функціонального рівняння (3.9).

Аналітичне продовження гамма функції на область $\mathbb{C}$ з виколотими точками $0, -1, -2, \ldots$ можна побудувати й інакше за допомогою так званого *інтегрального представлення Ханкеля для гамма функції.*

Теорема 3.3.1. *Нехай $\mathcal{H}$ — контур, що стартує у точці $+\infty$ у верхній півпвлощині, обходить проти годинникової стрілки початок координат та повертається у точку $+\infty$, залишаючись у нижній півплощині. Тоді*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{H}}(-t)^{-z}e^{-t}\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C}, \quad -z \notin \mathbb{N}_0.$$

Представлення Веєрштрасса у вигляді нескінченного добутку для гамма функції виглядає так

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(1+\frac{z}{n}\Big)e^{-z/n}\Big], \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.10}$$

де γ — стала Ейлера-Маскероні. З цього представлення випливає розклад $\ln\Gamma(z)$ у ряд:

$$-\ln\Gamma(z) = \ln z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\ln(1+z/n) - z/n\Big).$$

Функція $\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ називається *логарифмічною похідною гамма функції* або псі функцією. З формули (3.10) випливає, що

$$\psi(s+1) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n}\Big].$$

Іншим важливим наслідком представлення (3.10) є *формула доповнення* для гамма функції

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}, \tag{3.11}$$

яка випливає з розкладу синуса у нескінчениий добуток

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\Big).$$

Поклавши в (3.11) $z = 1/2$, отримуємо важливий факт: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

3.4 Додаток Г. Елементи теорії ймовірностей

3.4.1 Випадкові величини та їх розподіли

Базовим поняттям в теорії ймовірностей є поняття ймовірнісного простору. Нагадаємо його.

Означення 3.4.1. Ймовірнісним простором називається трійка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де Ω – довільна множина, яка називається простором елементарних подій, $\mathcal{F}$ – довільна σ-алгебра підмножин з Ω, а $\mathbb{P}$ – σ-адитивна міра, визначена на $\mathcal{F}$, така що $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$.

Приклад 3.4.2. Нехай $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ – борелівська σ-алгебра підмножин на $[0, 1]$, $\mathbb{P}$ – міра Лебега на $[0, 1]$, тобто для довільного $(a, b] \subset [0, 1]$, $a < b$ виконується $\mathbb{P}\{(a, b]\} = b - a$.

Наступний тривіальний приклад повсякчас використовується в ймовірнісному аналізі алгоритмів.

Приклад 3.4.3. Нехай $\mathcal{S}_n$ – множина всіх переставновок чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ (симетрична група порядку n). Покладемо $\Omega := S_n$, $\mathcal{F} := bool(S_n)$, і нехай міра $\mathbb{P}$ має рівномірний розподіл на Ω, тобто для довільної множини перестановок $A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}\{A\} = \frac{|A|}{n!}$. Трійка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ буде ймовірнісним простором. Він називається простором випадкових перестановок. На такому просторі всі перестановки рівнозначні в тому сенсі, що кожна з $n!$ перестановок має ймовірність $1/n!$.

Означення 3.4.4. Випадковою величиною ξ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ називається довільне відображення $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, таке що $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для довільної борелевської множини $B \in \mathbb{R}$.

Важливість умови $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ в цьому означенні полягає у тому, що воно дає змогу корректно визначати ймовірності $\mathbb{P}\{\xi \in B\}$ для широко класу множин B (всіх борелевських).

Приклад 3.4.5. Розглянемо ймовірнісний простір з прикладу 3.4.3. Оскільки $\mathcal{F}$ містить всі підмножини Ω, то довільне відображення $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ буде випадковою величиною. Зокрема, нехай $X_n(\omega)$ – число порівнянь, потрібних для сортування перестановки ω детермінованим алгоритмом швидкого сортування (див. **??** в розділі **??**), якщо в якості розбиваючого елемента на кожному кроці обирається найлівіший елемент перестановки. Відображення $X_n : \Omega \to \mathbb{N}$ буде випадковою величиною.

Приклад 3.4.6. На просторі з прикладу 3.4.2 розглянемо тотожнє відображення $\xi(\omega) = \omega$, $\omega \in [0,1]$. Функція ξ буде випадковою величиною, вона називається рівномірною на $[0,1]$.

Те основне, що відрізняє теорію ймовірностей від загальної теорії міри є поняття незалежності випадкових величин.

Означення 3.4.7. Випадкові величини $\xi, \eta, \ldots, \zeta$, задані на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ називаються незалежними, якщо для довільних борелевських множин $A, B, \ldots, V \subset \mathbb{R}$ має місце

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \in A, \eta(\omega) \in B, \ldots, \zeta(\omega) \in V\}\\ &\qquad = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \in A\} \times \mathbb{P}\{\omega : \eta(\omega) \in B\} \times \ldots \times \mathbb{P}\{\omega : \zeta(\omega) \in V\}.\end{aligned}$$

Нехай ξ є випадковою величиною на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Оскільки для довільного $x \in \mathbb{R}$ множина $(-\infty, x]$ є борелевською, то ймовірність $\mathbb{P}\{\xi \le x\}$ корректно визначена.

Означення 3.4.8. Функцією розподілу випадкової величини ξ називається функція, визначена рівністю $F(x) = \mathbb{P}\{\xi \le x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Кажуть, що заданий розподіл величини ξ, якщо задано її функцію розподілу.

В подальшому позначатимемо $\mathcal{L}(\xi)$ розподіл випадкової величини ξ.

Приклад 3.4.9. Для $[0,1]$-випадкової величини ξ функція розподілу така:

$$\mathbb{P}\{\xi \le x\} = \min\{x, 1\} 1_{\{x \ge 0\}}$$

Важливими числовими характеристиками випадкових величин є їх моменти.

Означення 3.4.10. Для випадкової величини ξ, заданої на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, k-м моментом називається значення інтегралу $\mathbb{E}\xi^k := \int_\Omega \xi^k(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$, якщо він збіжний; k-м абсолютним моментом називається значення інтегралу (можливо рівне $+\infty$) $\mathbb{E}|\xi|^k := \int_\Omega |\xi|^k(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$. Перший момент називається середнім, величина $\mathbb{D}\xi := \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$ дисперсією.

Безпосередньо з означення випливає, що моменти можна обчислювати також як інтеграли Стільт'єса:

$$\mathbb{E}\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \mathrm{d}F(x), \;\; \mathbb{E}|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \mathrm{d}F(x).$$

3.4.2 Типи збіжностей випадкових величин та їх розподілів

Перший тип збіжності, який називається слабкою збіжністю не вимагає, щоб випадкові величини були задані на одному ймовірнісному просторі. Ми сформулюємо три еквівалентні визначення цієї збіжності (доведення еквівалентності можна знайти, наприклад у [2]).

Означення 3.4.11. Послідовність випадкових величин $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ слабко збігається до випадкової величини ξ, якщо виконуєтсья одна з наступних еквівалентних умов:

- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\xi_n \le x\} = \mathbb{P}\{\xi \le x\}$ в усіх точках, де функція $x \mapsto \mathbb{P}\{\xi \le x\}$ неперервна;
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(\xi_n) = \mathbb{E}f(\xi)$ для всіх неперервних та обмежених функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}e^{\mathrm{i}t\xi_n} = \mathbb{E}e^{\mathrm{i}t\xi}$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, де $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Другий тип збіжності – збіжність у середньому порядку p вимагає, щоб всі величини та їх границя були задані на одному ймовірнісному просторі.

Означення 3.4.12. Послідовність випадкових величин $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається у середньому порядку $p \ge 1$ до випадкової величини ξ, якщо $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p = 0$. При $p = 2$ ця збіжність називається збіжністю у середньому квадратичному.

Зі збіжності у середньому порядку $p \ge 1$ випливає слабка збіжність (див. [2]).

Бібліоґрафія

[1] Abramovitz, M., Stegun, I. (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover, New York, 812 p.

[2] Billingsley, P. (1999). *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics, New York, 310 p.

[3] Drmota, M. (2009). *Random trees: An interplay between combinatorics and probability*, Springer.

[4] Flajolet, P., Sedgewick, R. (2008). *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press.

[5] Flajolet, P., Odlyzko, A.(1990). Singularity analysis of generating functions. *SIAM J. Disc. Math.* **3(2)**, p. 216–240.

[6] Hardy, G.H.(1924). *Orders of infinity: The «Infinitärcalcül» of Paul du Bois-Reymond*. Cambridge University Press. Second Edition.

[7] Greene, D.H., Knuth, D.E. (1990). *Mathematics for the analysis of algorithms*. Birkhauser.

[8] Marynych, A. (2010). On the asymptotics of moments of linear random recurrences. *Theory Stoch. Proc.* **16(32)**, p. 106–119.

[9] Neininger, R. (2010). Probabilistic analysis of algorithms, stochastic fixed-point equations and ideal metrics. `http://dmg.tuwien.ac.at/nfn/neininger/survey.pdf`

[10] Neininger, R., Rushendorf, L. (2004). On the contaction method with degenerate limit equation. *Ann. Probab.* **32**, p. 2838–2856.

[11] Rösler, U. (1991). A limit theorem for «Quicksort». *RAIRO Inform. Theor. Appl.* **25**, p. 85–100.

[12] Rösler, U. (2001). On the analysis of divide and conquer algorithms. *Algoritmica* **29**, p. 238–261.

[13] Грэкхем, Р., Кнут, Д., Паташник, О.(1998). *Конкрентная математика. Основание информатики.* М.:Мир «Бином», 704 с.

[14] Евграфов, М. А.(1991). *Аналитические функции.* М.:Наука, 448 с.

[15] Золотарев, В.М. (1986). *Современная теория суммирования независимых случайных величин.* М.:Наука, 416 с.

[16] Уиттекер, Э., Ватсон, Дж.(2002). *Курс современного анализа.* М.: Эдиториал УРСС, 516 с.